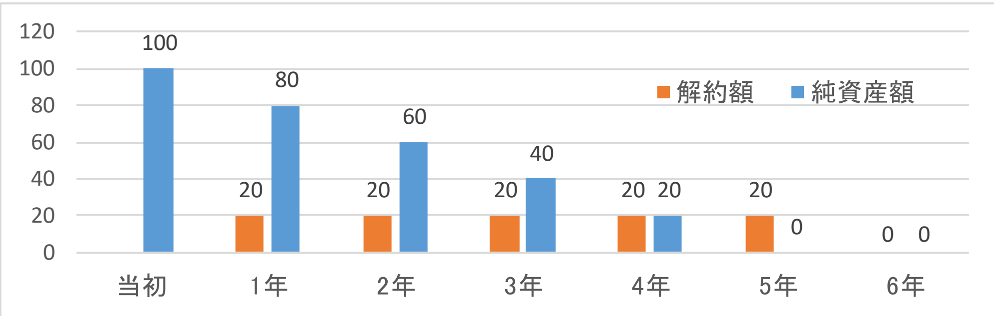
投信の算術
「平均保有年数はなぜ解約率の逆数なのか」

2021 年 8 月 4 日

公益財団法人　日本証券経済研究所
特任リサーチ・フェロー　明田雅昭

純資産残高の 20%が解約されたとき、平均保有年数は解約率の逆数をとって 5 年と計算する。しかし、読者は疑問に思ったことはないだろうか。当初純資産額の 20%が毎年解約されていくとしたら 5 年が過ぎたところで純資産額が 0 になる（図表１）。解約が 1 年目から始まって最長 5 年で終わるのなら平均保有年数は 3 年ではないのか。なぜ最長保有年数の 5 年が平均保有年数になるのか。

図表1．解約額と純資産額の発生パターン



通常の確率・統計問題での平均値の計算は次のように行う。当初残高 100 のうち 20%である 1 /5 が 1 年で無くなり、次の 1/5 が 2 年で無くなり・・・・最後の 1/5 が 5 年で無くなるとしたら、

$$\text{平均保有年数} = \frac{1}{5}\times 1 + \frac{1}{5}\times 2 + \frac{1}{5}\times 3 + \frac{1}{5}\times 4 + \frac{1}{5}\times 5$$

$$= \frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5) = \frac{15}{5} = 3 \qquad \text{(1)式}$$

となって 3 年だ。一般化して、1 年で 1/n ずつなくなり n 年目で全部なくなるとしよう。この場合は、

$$\text{平均保有年数} = \frac{1}{n}\times 1 + \frac{1}{n}\times 2 + \cdots + \frac{1}{n}\times n = \frac{1}{n}\times\left(1+2+\cdots+n\right)$$

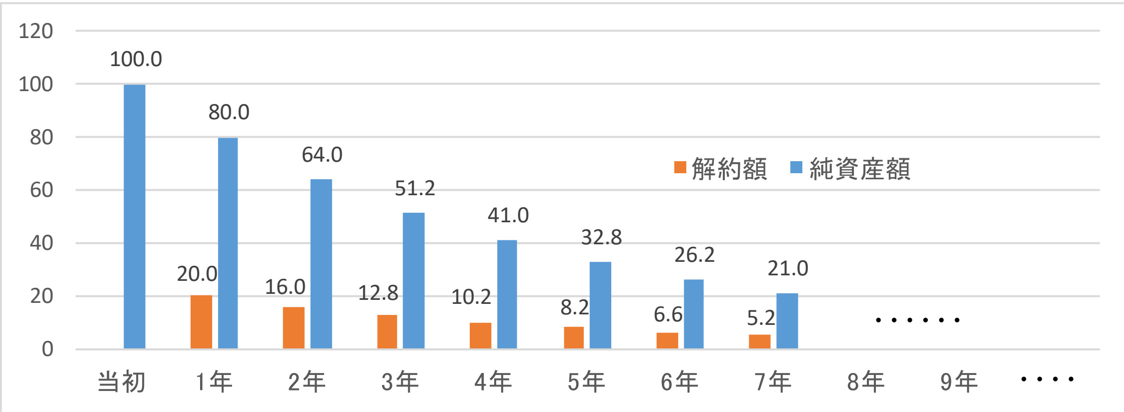
$$= \frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2} \qquad \text{(2)式}$$

ここで、$n = 5$とすれば答えは(5+1)/2=6/2＝3 となって(1)式と一致する。

毎年一定額が解約されるという前提にするのなら(2)式で正しい。ところが、投資信託業界の前提はそうではなく、毎年一定比率で解約されるとしているのである。

1 年で期初純資産額 100 の 20%が解約されるとすれば、1 年目の解約は 20 で残高は 80 である。ここまでは一定額ケースと同じだ。しかし、2 年目の解約は 80 に対する 20%の 16 で 2 年目末の残高は 64 となる。以下、同様に前年末残高の 20%が解約されるとしたら、純資産額と解約額は図表 2 のように減少していく。純資産額も解約額もどんどん小さくなるものの永遠に残り続けて 0 になることはない。

図表2. 解約額と純資産額の発生パターン（定率前提）



この場合、平均保有年数は(1)式と同様に次のように計算する。

$$平均保有年数 = \frac{20}{100} \times 1 + \frac{16}{100} \times 2 + \frac{12.8}{100} \times 3 + \frac{10.2}{100} \times 4 + \frac{8.2}{100} \times 5 + \frac{6.6}{100} \times 6 + \cdots \quad (3)式$$

これでは計算しきれないではないか。しかも 3 年目の 12.8 まではいいとしても 4 年目は正確には 10.24 だし、5 年目は 8.192 で、6 年目は 6.5536 なので、(3)式では正確性を欠く。つまり、正確に計算するためには、パラメーターを一般化して理論式を導き、無限級数の公式を取り入れなければならないのだ。

期初の純資産残高を 1 とし、解約率をrとしよう。1 年目の解約額はrで純資産残高は$1-r$である。2 年目の解約額は$(1-r)r$で純資産残高は$(1-r)^2$である。これを続けていくと、n 年目の解約額は前年末の純資産額$(1-r)^{n-1}$に解約率rを掛けた$(1-r)^{n-1}r$であり、純資産残高は$(1-r)^n$になると一般化される。したがって、平均保有年数は次のようになる。

$$平均保有年数 = r \times 1 + (1-r)r \times 2 + (1-r)^2 r \times 3 + \cdots + (1-r)^{n-1} r \times n + \cdots$$

$$= r\{1 + (1-r) \times 2 + \cdots + (1-r)^{n-1} \times n + \cdots\} = r \times \sum_{s=1}^{\infty}\{(1-r)^{s-1} \times s\} \quad (4)式$$

この式の更なる展開はテクニカル過ぎるので Appendix.1 に譲るが、結果は次のような簡潔な式に帰着する。

$$平均保有年数 = \frac{1}{r} \qquad (5)式$$

つまり、投資信託業界で一般に使われている平均保有年数というのは、一定比率で解約が進むとの前提をおいて、(4)式のような面倒くさい計算をした結果として得られる「簡潔な(5)式」なのである。

ここまでの説明をよく聞いて理解に努めた読者は新たな疑問を持つかもしれない。(3)式をじっくり見ると、1 年目の解約は 1 年目末という瞬間に、2 年目の解約は 2 年目末という瞬間に発生した扱いになっている。これは現実から乖離していないだろうか。1 年目末時点とか 2 年目末時点ではなく、年間を通じて満遍なく解約が発生するという方が自然ではないか。そのとおりである。

年間を通じて満遍なく解約が発生していることの近似としては、年央に発生したと見なすのがよいだろう。(3)式でいえば、1 年目の解約 20 は 0.5 年時点で、2 年目の解約 16 は 1.5 年時点で発生したと見なすのである。つまり、(3)式のうち解約発生時点を表している 1 は 0.5 に、2 は 1.5 に、以下同様に 0.5 年ずつ小さい値にする。結果は、直感的に考えても平均保有年数はちょうど 0.5 年短くなるだろう。

実際に、一般的な理論式である(5)式は次のように 0.5 年短くなるように修正される。

$$
\begin{aligned}
\text{平均保有年数} &= r \times \sum_{s=1}^{\infty} \{(1-r)^{s-1} \times (s-0.5)\} \\
&= r \times \sum_{s=1}^{\infty} \{(1-r)^{s-1} \times s\} - 0.5r \times \sum_{s=1}^{\infty} (1-r)^{s-1} \\
&= \frac{1}{r} - 0.5r \times \frac{1}{1-(1-r)} = \frac{1}{r} - 0.5r \times \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - 0.5 \qquad (6)\text{式}
\end{aligned}
$$

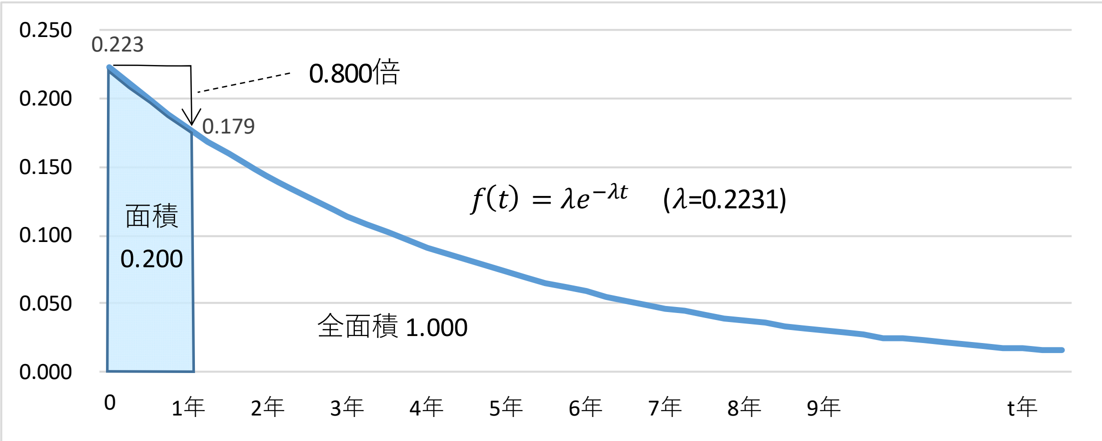
これは業界で一般的に使われている平均保有年数は 0.5 年ほど過大評価になっていることを示唆している。

「満遍なく解約が発生する」ことをより精緻に反映するためには、ここまで展開してきた離散モデルではなく連続モデルを使う必要がある。

図表 3 は最初の 1 年間で期初純資産額のうち 20%が解約される場合の純資産額$f(t)$の連続モデルを表している（tは年を表す）。連続モデルの数学的に正確な説明は Appendix.2 に譲り、ここでは結果だけ説明する。

純資産額$f(t)$は指数関数$\lambda e^{-\lambda t}$で表される。eは自然対数の底として使われる数学定数で、近似的には 2.71828 という数値である。λは 1 年間で純資産額が 1 − r 倍に減少するように定められたパラメーターで、解約率 r から$\lambda = -\ln(1-r)$と計算する。図表 3 の例では r=0.2、λ＝0.2231 となる。図表 3 の青線の漸減曲線が純資産額の時間的推移を表す

図表3. 純資産額推移の連続モデル



$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$という関数である。この曲線の下の領域の面積は 1.000 である。この領域のうち最初の 1 年間を青色で塗ってあるが、この面積は 0.200 である。純資産額は開始時点の 0.2231 から 1 年後には 0.1785 となり、ちょうど 80%減少している。

連続モデルでの平均保有年数は積分計算で行うが、結果は次のようにλの逆数となる。

$$\text{平均保有年数} = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \times t dt = \cdots\cdots = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{(7)式}$$

解約率 r ごとにモデルによって平均保有年数がどのように変わるかを比較した結果が図表 4 である。従来離散モデル(5)式（従来からの「逆数公式」）と比べて修正離散モデル(6)式は 0.5 年短い。連続モデル(7)式は修正離散モデルと近いがやや短くなっている。修正離散モデルで年央に一括解約が発生するとした仮定は、やや過大評価の結果をもたらしている。図表 3 から示唆されるように 1 年間の前半の方が後半よりも解約量が多いので、その分、年間の加重平均時点は年央より短くなるからである。逆数公式と他の二つの修正モデルの差異は解約率が高くなるほど目立つようになることに注意が必要である。

図表4. 平均保有年数のモデル比較

1年間の解約率(r)	10%	20%	30%	40%	50%	75%
従来離散モデル(5)式	10.00	5.00	3.33	2.50	2.00	1.33
修正離散モデル(6)式	9.50	4.50	2.83	2.00	1.50	0.83
連続モデル(7)式	9.49	4.48	2.80	1.96	1.44	0.72

本小論の結論は次のとおりである。

① 平均保有年数は業界慣行として解約率の逆数として計算しているが、これは明らかに過大評価である。
② 正確には連続モデルを用いるべきであるが、精度から考えて、解約率の逆数から 0.5 年を引いたものとするので十分である。
③ とはいえ、逆数公式の浸透度から考えて、正しい計算式で置き換える啓蒙を行うのではなく、逆数公式の持つ問題点を認識した上で利用してくのが現実的であろう。

Appendix.1　離散モデルの途中計算式

(4)式の無限和部分は次のように展開される。

$$\sum_{s=1}^{\infty}\{(1-r)^{s-1}\times s\}=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{-\frac{d}{dr}(1-r)^{s}\right\}=-\frac{d}{dr}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}(1-r)^{s}\right\}$$

$$=-\frac{d}{dr}\left\{\frac{1-r}{1-(1-r)}\right\}=-\frac{d}{dr}\left\{\frac{1-r}{r}\right\}=-\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}-1\right\}=\frac{1}{r^{2}}$$

$$\text{平均保有年数}=r\times\sum_{s=1}^{\infty}\{(1-r)^{s-1}\times s\}=r\times\frac{1}{r^{2}}=\frac{1}{r}$$

Appendix.2　連続モデル

純資産額$f(t)$の減少率がどの時点tにおいても定数$-\lambda$に等しいとすると、$f(t)$は次の式を満たすことになる。

$$\frac{df(t)}{f(t)}=-\lambda dt$$

この微分方程式を満たすのは $f(t)=ae^{-\lambda t}$という関数であり、a は任意の定数である。t=0 から無限の将来に渡って解約される量が 1 であるとすれば、a は次のように定まる。

$$1=\int_{0}^{\infty}ae^{-\lambda t}dt=\left[-\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_{0}^{\infty}=0-\left(-\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda\times 0}\right)=\frac{a}{\lambda}$$

従って、a＝λ であり、$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ である。平均保有年数はt年から$t+dt$年の間に解約される量$\lambda e^{-\lambda t}\times dt$に$t$を乗じたものをすべての時点$t$について合計したものであり、

$$\text{平均保有年数}=\int_{0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\times tdt$$

と積分計算すればよい。この計算は以下のように進められる。

$$\int_{0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\times tdt=-\int_{0}^{\infty}t\left(e^{-\lambda t}\right)'dt=\int_{0}^{\infty}t'e^{-\lambda t}dt-\int_{0}^{\infty}\left(te^{-\lambda t}\right)'dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}dt-\int_{0}^{\infty}\left(te^{-\lambda t}\right)'dt=\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_{0}^{\infty}-\left[te^{-\lambda t}\right]_{0}^{\infty}=\left(0+\frac{1}{\lambda}\right)-(0-0)=\frac{1}{\lambda}$$

従って、次の結論を得る。

$$\text{平均保有年数}=\frac{1}{\lambda}$$

なお、1 年間で解約額が r になるとすれば、λ と r の関係は次のようになる。

$$r=\int_{0}^{1}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_{0}^{1}=1-e^{-\lambda}$$

したがって、$e^{-\lambda}=1-r$　であり、$\lambda=-\ln(1-r)$　である。

以上