

最適満期構成の理論的考察

——新発国債の需要と供給——

須 藤 時 仁

要 旨

本稿の目的は、国債の発行に係るコスト最小化とリスク抑制を達成するための発行（満期）政策を理論的に考察することである。その前半では、政府の予算制約に基づき、国債発行に係るコストとリスクの合計が最小となる最適満期構成（発行ベース）を導出し、次いで標準的なポートフォリオ理論に基づき、新発国債への投資に係る投資家の効用（期待収益率）が最大となる需要ベースでの最適満期構成（最適投資ポートフォリオ）を導出した。これらの最適供給構成と需要構成から各々7命題、2命題が導かれたが、特に、「国債の発行量を増加せざるを得ないとき、政府は短期的な償還負担およびそれに伴う税率引き上げを避けるために長期債の発行比率を上昇させるのに対して、投資家は政府に対する中長期的観点からの信用リスク増大を懸念して中長期債より短期債への選好を強める」という特徴が見出されたことは、わが国の現状に照らして注目される。したがって、この場合には満期ごとに（特に短期債と長期債で）需給のミスマッチが生じることとなるが、この問題については本稿の後半で分析した。

後半では、政府の最適供給構成と投資家の最適需要構成に基づいて満期構成の均衡経路を導出し、さらに短期債と長期債で需給が不均衡となった場合に政府がどのような発行（満期）政策を採るべきかを分析した。分析から得られた重要な結論は以下の2点である。第1に、金利の期間構造における純粹期待理論が常に成立する場合でも、発行コストの最小化に加え課税変化に対するリスク抑制を国債管理政策の目的に含めたときには、国債発行の満期構成は管理政策の目的に対して必ずしも無差別ではない。発行コストの最小化のみを目的とした場合には、純粹期待理論の成立は満期構成の無差別を含意するから、政府および中央銀行によるイールド・カーブの管理が国債管理政策を意味することとなる。このことは、たとえ課税変化に対するリスクを考慮した場合でも、国債発行量の対実質GDP比 d が低水準で安定しているときには妥当する。しかし、 d が極めて大き

いときには、将来の課税変化のリスクを抑制するための最適満期構成を政府は考えなければならない。

第2に、財政事情が悪化しているまたはそれが見込まれる場合には、政府は短期債の発行比率を上昇させることも有効な政策となりうる。経済成長の鈍化や国債発行量の増大など現在または将来の財政事情に対する不確実性が増す場合、各国債の価格を所与として需給ギャップを考えなければ、政府は長期債の発行比率を上昇させる一方、投資家は短期債への投資比率を上昇させることが最適な選択である。しかし、この満期構成の需給ギャップにより長期債価格（金利）に対するリスク・プレミアムが大きくなる場合には、政府は財政再建に対する市場の信認を維持することによってそのリスク・プレミアムを抑え、さらには市場による長期債の未消化を回避するためにも需要に合わせて短期債の発行比率を上昇させることが望ましい。

目 次

- | | |
|---------------------|----------------|
| I. はじめに | 2. 最適需要構成 |
| II. 政府による最適供給 | IV. 均衡経路と不均衡分析 |
| 1. 予算制約と政府行動の仮定 | 1. 均衡経路 |
| 2. 最適供給構成 | 2. 不均衡分析 |
| 3. 供給面における最適満期構成の特徴 | V. 結論 |
| III. 投資家による最適需要 | 補論 命題の証明 |
| 1. 投資家行動の仮定 | 参考文献 |

I. はじめに

近年、わが国をはじめ世界的にも公的債務管理政策についての議論が盛んになっている。IMF・世界銀行は2001年3月に「公的債務管理のための指針」を公表し、その後数度の改訂が行われている（IMF and World Bank [2003]）。わが国でも、財務省が「公的債務管理政策に関する研究会」（以下、研究会）を設置し、03年11月にその研究会から報告書（公的債務管理政策に関する研究会 [2003]）が公表された。研究会は、IMF・世界銀行の指針をベースにしながらも、わが国公的債務の特徴を考慮して、公的債務管理政策が対象とする範囲の拡張および管理政策に対する提言を行っている。

IMF・世界銀行の指針、わが国研究会の報告書、さらにはアメリカの会計検査院の調査（GAO [2001]）によると、公的債務管理政策の主目的としては資金調達コストの最小化とリスクの抑制を挙げることができる¹⁾。ここで、「資金調達コストの最小化」とは「金利に係るリスク・プレミアム

を最小化すると同時に、発行価格を所与としたとき調達必要額全体に係るコストを最小化する（よう債務の構成を図る）こと」を意味し、「リスクの抑制」とは「コストに対するリスク（予期せぬ高金利で国債を借り換えなければならないリスク）と経済厚生（課税変化）に対するリスクを抑制すること」を意味する。

本稿の目的は、国債の発行に係るコスト最小化とリスク抑制を達成するための発行（満期）政策を理論的に考察することである。なお、本稿が対象とする公的債務は国債のみであるため、以下では公的債務管理ではなく国債管理という用語を用いる。

最適満期構成の先行研究の多くは、国債管理政策の目的を経済厚生の最大化と仮定している²⁾。国債の満期構成が経済厚生にどのような影響を与えるかについての研究は、当初、世代間のリスク配分の観点から進められた。代表的なものに Stiglitz [1983], Fischer [1983], Peled [1984, 1985], Pagano [1988], Gale [1990] 等がある。しかしこの観点には、長期債発行に伴う現世代の納税負担と将来世代のそれとのバランスが考慮されておらず、Barro [1979], Lucas and Stokey [1983] は、経済厚生を最大化するためには、税率を平準化するように国債の発行を考えることが最適政策であることを示した。この結果を踏まえ、特に90年代以降、税率を平準化するにおいて満期構成がどのような役割を担うかが研究され始めた³⁾。代表的な先行研究に Calvo and Guidotti [1990], Bohn [1990], Barro [1995], Missale [1999], 須藤 [2003] 等がある。

これらの先行研究は前述した管理政策の目的のうち「経済厚生（課税変化）に対するリスク抑制」しか対象としていなく、「コスト最小化」の目的が明示的に考慮されていない。この目的を明示的に考慮したモデルとして Coe et al. [2000, 2003] と西岡 [2004] がある⁴⁾。

Coe et al. と西岡のモデルは、形態がやや異なるが、その基本的な考え方は投資ポートフォリオ理論モデルに基づいている。つまり、 t 期における i 期国債の発行コストを $r_{i,t}$ 、当該国債の国債残高または国債発行量に占める割合を $w_{i,t}$ として、政府は発行コストと発行に伴うリスクの合計 $\sum_i \{w_{i,t} E[r_{i,t}] + (\lambda/2) w_{i,t}^2 \text{Var}[r_{i,t}]\}$ （ λ は危険回避度）を最小にするよう各 $w_{i,t}$ を決定する。このモデルに基づき、Coe et al. は1985–95年（[2000]）または1985–2000年（[2003]）にかけてUKにおいて満期構成を変えることによって利払いコストを実際より低下させる余地があったことを実証した。一方、西岡は政府が国債を発行する場合の最適満期構成を理論的に考察し、①市場に占める長期投資家の運用資産比率が高まった場合、長期債の発行比率は上昇し、長期債の超過収益率は低下すること、②政府が危険回避的となった場合、長期債の発行比率は上昇し、長期債の超過収益率は上昇すること、③投資家が危険回避的となった場合、長期債の発行比率は低下し、長期債の超過収益率は上昇することを示した。

しかしながら、Coe et al. と西岡のモデルには、前述の先行研究とは逆に経済厚生（課税変化）に対するリスクが考慮されていない。さらに、西岡は投資家による国債投資の最適満期構成、つまり需要面での最適満期構成を考慮しているが、Coe et al. はこの点を考慮していない。

本稿では、これらの欠点を修正した最適満期構成のモデルを提示する。ただし、以下の理由から、コストに対するリスクはモデルで明示的に扱わない。

- ① 本稿では国債の発行価格は市場の需給によって決まることを前提とする。したがって、短期債の更新には金利リスク（より高い金利で更新しなければならないリスク）や借換リスク（全額を市場で消化できないリスク）などが伴うが、これらのリスクが顕現した場合の予期しないコスト増加は税率の引き上げにつながるという意味で、コストに対するリスクは課税変化に対するリスクに還元することができる。
- ② 本稿では国債管理政策の中でも満期政策を考察の対象としているが、コストに対するリスクの抑制については、財政の健全化、ベンチマーク債発行や国債の先物またはレポ取引の導入による流動性向上政策、オークション制度導入や発行日の事前公表などの発行制度改革を考察の主たる対象とすべきである（Missale [1999]）。

次節以下の構成は次のようになっている。第Ⅱ節では、政府の予算制約に基づき、国債発行に係るコストとリスクの合計が最小となる最適満期構成（発行ベース）を導出する。導出された最適満期構成は、「満期別需要を考慮せず、政府の一方的な国債管理政策に基づいたもの」という意味で最適供給構成を表している。第Ⅲ節では、標準的なポートフォリオ理論に基づき、新発国債への投資に係る投資家の効用が最大となる需要ベースでの最適満期構成（最適投資ポートフォリオ）を導出する。第Ⅳ節では、政府の最適供給と投資家の最適需要に基づいて満期構成の均衡経路を導出し、さらに、短期債と長期債で需給が不均衡となった場合に政府がどのような発行（満期）政策を採るべきかを分析する。第Ⅴ節では、これまでの分析を整理し、今後の課題を述べる。

Ⅱ. 政府による最適供給

本節では、政府の予算制約に基づき、国債発行に係るコストとリスクの合計が最小となる最適満期構成（発行ベース）を導出する。導出された最適満期構成は、「満期別需要を考慮せず、政府の一方的な国債管理政策に基づいたもの」という意味で最適供給構成を表している。

1. 予算制約と政府行動の仮定

供給面での最適満期構成を導出するために、政府行動について次のような仮定をおく。

政府は短期債（1期債）、中期債（2期債）、長期債（3期債）の3種類のゼロ・クーポン債（実質償還価格は1）を発行する。既発国債の買戻消却やリオープンなどの残高操作がないとき、政府の予算制約は、歳出として政府支出と1, 2, 3期前に発行した国債の償還があり、それを租税（所得税）と新たな国債の発行で賄う構造になっている。この予算制約は次のように定式化できる。

$$G_t + \sum_{i=1}^3 \alpha_{i,t-i} D_{t-i} = \tau_t Y_t + \sum_{i=1}^3 q_{i,t} \alpha_{i,t} D_t \quad (1)$$

ここで、

Y_t : t 期における実質非資産所得（実質GDP）

G_t : t 期における実質政府支出

τ_t : t 期における所得税率

$q_{i,t}$: t 期における i 期債 ($i = 1, 2, 3$) の実質発行価格 ($q_{3,t} < q_{2,t} < q_{1,t} < 1$)⁵⁾

D_t : t 期における国債の発行量

$\alpha_{i,t}$: D_t に占める i 期債の発行構成比 ($0 \leq \alpha_{i,t} \leq 1, \sum_{i=1}^3 \alpha_{i,t} = 1$)

である⁶⁾。

国債の発行価格 $q_{i,t}$ は流通市場での価格に基づいて決められ、政府にとって所与のものであると仮定すれば、予算制約式(1)において政府が決定しなければならない変数は G_t , τ_t , D_t , $\alpha_{1,t}$, $\alpha_{2,t}$ である。 $\alpha_{3,t}$ は $\alpha_{1,t}$ と $\alpha_{2,t}$ が決定されれば $\alpha_{3,t} = 1 - \alpha_{1,t} - \alpha_{2,t}$ により決まる。

これらの変数を決定することは広義の財政政策の問題と言えようが、本稿の問題意識は国債管理政策にあることから、それを明確にするために「財政政策」と「国債管理政策」の役割を次のように定義する。まず「財政政策」とは、政府が経済環境に応じて政府支出 G_t を決定し、それによって確定した歳出総額を税収 (τ_t の決定) と国債発行 (D_t の決定) によってどのようにファイナンスするかを決定する政策と定義する。一方、「国債管理政策」とは、財政政策によって決定された G_t , τ_t および D_t を所与として、国債発行によって生じる将来のコストとリスクの合計が最小となるように満期構成 $\alpha_{1,t}$, $\alpha_{2,t}$ (および $\alpha_{3,t}$) を決定する政策と定義する。

ここで「将来のコストとリスク」の意味を明確にしておこう。まず「将来のコスト」だが、政府は t 期に各国債を 1 単位あたり実質価格 $q_{i,t}$ ($i = 1, 2, 3$) で発行し、将来の満期時にはそれらを単位当たり実質価格 1 で償還しなければならないから、国債発行に係る将来の総コストは

$$\sum_{i=1}^3 (1 - q_{i,t}) \alpha_{i,t} D_t \quad (2)$$

と表せる。

一方、「将来のリスク」は t 期における i 期債の発行が将来の税率に与える影響である。つまり、予算制約式(1)より、 t 期に発行した i 期債の償還が $t+i$ 期に行われるため、 i 期債の発行量は $t+i$ 期の税率 τ_{t+i} に影響を及ぼしうる。経済厚生観点から税率は平準化されることが望ましいことから、国債発行に係る「将来のリスク」は

$$\sum_{i=1}^3 \text{Var}[\tau_{t+i}] \quad (3)$$

によって表せる。

したがって、前述の定義に従えば、(2), (3)式より、政府の国債管理政策とは G_t , τ_t , D_t を所与として損失関数

$$L_t = \sum_{i=1}^3 (1 - q_{i,t}) \alpha_{i,t} D_t + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\lambda G}{2} \right) \text{Var}[\tau_{t+j}] \quad (4)$$

を $\alpha_{1,t}$, $\alpha_{2,t}$ について最小にすることとなる。なお、上式で λG は損失関数におけるコストに対するリスクのウェイト (リスク回避度) を表し、

$$0 < \lambda G < 1 \quad (5)$$

と仮定する。

2. 最適供給構成

前項で定義した国債管理政策から最適満期構成を導出するためには τ_{t+j} を定義しなければならない。予算制約式(1)より、 τ_{t+j} は

$$\tau_{t+j} = \frac{G_{t+j}}{Y_{t+j}} + \sum_{i=1}^3 \alpha_{i,t+j-i} \left(\frac{D_{t+j-i}}{Y_{t+j}} \right) - \sum_{i=1}^3 q_{i,t+j} \alpha_{i,t+j} \left(\frac{D_{t+j}}{Y_{t+j}} \right)$$

となる。ここで

$$d_t \equiv \frac{D_t}{Y_t}, \quad g_t \equiv \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$$

と定義し、さらに

$$\frac{G_t}{Y_t} = a(\text{一定}) \quad \forall t$$

と仮定すると、上式は

$$\tau_{t+j} = a + \sum_{i=1}^3 \alpha_{i,t+j-i} \left(\frac{d_{t+j-i}}{\prod_{l=0}^{j-i} g_{t+l-i}} \right) - \sum_{i=1}^3 q_{i,t+j} \alpha_{i,t+j} d_{t+j} \quad (6)$$

と書き換えることができる。

政府にとって Y_t は外生変数であるから、損失関数(4)で第1項の D_t を d_t に置き換えて

$$L_t \equiv \sum_{i=1}^3 (1 - q_{i,t}) \alpha_{i,t} d_t + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\lambda_G}{2} \right) \text{Var}[\tau_{t+j}] \quad (4')$$

と再定義すると、政府による国債管理政策は次のように定式化できる。

$$\text{Min}_{\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}} L_t$$

$$\text{s.t. (6)式, } \alpha_{3,t} = 1 - \alpha_{1,t} - \alpha_{2,t}, \quad 0 \leq \alpha_{i,t} \leq 1 (i=1, 2), \quad \alpha_{1,t} + \alpha_{2,t} \leq 1 \quad \forall t$$

この最適化問題を解くと1階の条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_t}{\partial \alpha_{1,t}} &= (q_{3,t} - q_{1,t}) d_t \\ &+ \frac{\lambda_G}{2} \left[2d_t \left\{ \alpha_{1,t} d_t + \alpha_{2,t-1} \frac{d_{t-1}}{g_t} + (1 - \alpha_{1,t-2} - \alpha_{2,t-2}) \frac{d_{t-2}}{g_t g_{t-1}} \right\} \text{Var} \left[\frac{1}{g_{t+1}} \right] \right. \\ &\quad \left. - d_{t+1} d_t \text{Cov} \left[\alpha_{1,t+1} q_{1,t+1} + \alpha_{2,t+1} q_{2,t+1} + (1 - \alpha_{1,t+1} - \alpha_{2,t+1}) q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \right] \\ &+ \frac{\lambda_G}{2} \left[-2(1 - \alpha_{1,t} - \alpha_{2,t}) d_t^2 \text{Var} \left[\frac{1}{g_{t+3} g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right. \\ &\quad \left. + d_{t+3} d_t \text{Cov} \left[\alpha_{1,t+3} q_{1,t+3} + \alpha_{2,t+3} q_{2,t+3} + (1 - \alpha_{1,t+3} - \alpha_{2,t+3}) q_{3,t+3}, \frac{1}{g_{t+3} g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_{1,t+2} d_{t+2} d_t \text{Cov} \left[\frac{1}{g_{t+3}}, \frac{1}{g_{t+3} g_{t+2} g_{t+1}} \right] \\
& -\alpha_{2,t+1} d_{t+1} d_t \text{Cov} \left[\frac{1}{g_{t+3} g_{t+2}}, \frac{1}{g_{t+3} g_{t+2} g_{t+1}} \right] \\
& =0
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_t}{\partial \alpha_{2,t}} &= (q_{3,t} - q_{2,t}) d_t \\
& + \frac{\lambda_G^2}{2} \left[2d_t \left\{ \alpha_{2,t} d_t + (1 - \alpha_{1,t-1} - \alpha_{2,t-1}) \frac{d_{t-1}}{g_t} \right\} \text{Var} \left[\frac{1}{g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right. \\
& \quad \left. - d_{t+2} d_t \text{Cov} \left[\alpha_{1,t+2} q_{1,t+2} + \alpha_{2,t+2} q_{2,t+2} + (1 - \alpha_{1,t+2} - \alpha_{2,t+2}) q_{3,t+2}, \frac{1}{g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \alpha_{1,t+1} d_{t+1} d_t \text{Cov} \left[\frac{1}{g_{t+2}}, \frac{1}{g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\lambda_G^3}{2} \left[-2(1 - \alpha_{1,t} - \alpha_{2,t}) d_t^2 \text{Var} \left[\frac{1}{g_{t+3} g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + d_{t+3} d_t \text{Cov} \left[\alpha_{1,t+3} q_{1,t+3} + \alpha_{2,t+3} q_{2,t+3} + (1 - \alpha_{1,t+3} - \alpha_{2,t+3}) q_{3,t+3}, \frac{1}{g_{t+3} g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \alpha_{1,t+2} d_{t+2} d_t \text{Cov} \left[\frac{1}{g_{t+3}}, \frac{1}{g_{t+3} g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \alpha_{2,t+1} d_{t+1} d_t \text{Cov} \left[\frac{1}{g_{t+3} g_{t+2}}, \frac{1}{g_{t+3} g_{t+2} g_{t+1}} \right] \right] \right] \\
& =0
\end{aligned} \tag{8}$$

これらの1階の条件を $\alpha_{1,t}$ と $\alpha_{2,t}$ について解くためには、政府は経済成長率、経済成長率と各国債価格との関係、国債発行量の対実質GDP比について3期先まで予想しなければならない。これらの予想について次のような仮定をおく。

① 経済成長率

$$\frac{1}{g_{t+1}^e} = \frac{1}{g_t} + u_t, \quad u_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_u^2) \tag{9}$$

$$\frac{1}{g_{t+3}^e} = \frac{1}{g_{t+2}^e} = k \quad (\text{一定}, k > 0) \tag{10}$$

ここで、上付き文字 e は政府による予想を表す。したがって g_{t+j}^e ($j=1, 2, 3$) はすべて確率変数でなければならない。その意味で(9)式は妥当だが、(10)式はこの要件を満たしていない。しかしながら政府が国債管理政策のために経済予想をする場合、短期的には(9)式のように今期の経済成長率に基づいて予想するとしても、中長期的な予想は政府の「経済計画(目標)」に依拠すると仮定するほうが現実的であろう。したがって、 t 期時点における2期先、3期先の経済成長率は一定(k^{-1})と仮定した。

② 経済成長率と国債価格との関係

$$\text{Cov} \left[q_{i,t+1}^e, \frac{1}{g_{t+1}^e} \right] = \text{Cov} \left[q_{i,t+2}^e, \frac{1}{g_{t+2}^e g_{t+1}^e} \right] = \text{Cov} \left[q_{i,t+3}^e, \frac{1}{g_{t+3}^e g_{t+2}^e g_{t+1}^e} \right] > 0$$

(i = 1, 2, 3) (11)

$$\text{Cov} \left[q_{1,t+j}^e, \prod_{l=1}^j \frac{1}{g_{t+l}^e} \right] = \text{Cov} \left[q_{2,t+j}^e, \prod_{l=1}^j \frac{1}{g_{t+l}^e} \right] = \text{Cov} \left[q_{3,t+j}^e, \prod_{l=1}^j \frac{1}{g_{t+l}^e} \right] > 0$$

(j = 1, 2, 3) (12)

(11)式は、 t 期において政府が「各国債の j 期後 ($j = 1, 2, 3$) の価格は、 j に拘らず 1 期後から j 期後までの累積経済成長率と安定した関係を維持しており、その関係とは経済成長率が上昇すれば国債価格が下落（金利は上昇）するという関係である」と想定していることを示している。(12)式は、(11)式で説明した関係が $t+j$ 期時点のイールド・カーブ全体に成立すると政府が想定していることを表している。なお、以下では、 t 期までの情報に基づいて Cov を定義しているという意味で $\text{Cov} [f(q), h(g^e)] \equiv \text{Cov}_t [f(q), h(g)]$ と記す。

③ 国債発行量の対実質 GDP 比率

$$d_{t+i}^e = m^i d_t \quad (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

ここで m は $m \geq 0$ を満たす定数である。これは t 期において政府が今後 3 期間の国債発行量の対実質 GDP 比率が平均 m の割合で変化すると想定していることを示している。

以上の仮定の下で(7)、(8)式を $\alpha_{1,t}$ と $\alpha_{2,t}$ について解くと、最適満期構成は次のようになる⁷⁾。

$$\begin{aligned} \alpha_{1,t}^* = & \frac{1}{1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4} \left[\frac{1}{\lambda_G \sigma_u^2 d_t} \{ \lambda_G k^2 (q_{1,t} - q_{2,t}) + (q_{1,t} - q_{3,t}) \} \right. \\ & + \frac{1}{g_t d_t} \left\{ \lambda_G^2 k^4 \alpha_{3,t-1} d_{t-1} - (1 + \lambda_G k^2) \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right\} \\ & \left. + \frac{1}{2 \sigma_u^2} m(1 - \lambda_G m) \{ 1 + (m + k^2) \lambda_G \} \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2,t}^* = & \frac{1}{1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4} \left[\frac{1}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 d_t} \{ (q_{2,t} - q_{3,t}) - \lambda_G^2 k^4 (q_{1,t} - q_{2,t}) \} \right. \\ & + \frac{1}{g_t d_t} \left\{ - (1 + \lambda_G k^4) \alpha_{3,t-1} d_{t-1} + k^2 \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right\} \\ & \left. + \frac{1}{2 k^2 \sigma_u^2} m(1 - \lambda_G m) (m - \lambda_G k^4) \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \right] \end{aligned} \quad (15)$$

このとき

$$\begin{aligned} \alpha_{3,t}^* &= 1 - \alpha_{1,t}^* - \alpha_{2,t}^* \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4} \left[\frac{1}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 d_t} \{ (q_{2,t} - q_{3,t}) + \lambda_G k^2 (q_{1,t} - q_{3,t}) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{g_t d_t} \left[\{1 + \lambda_G (1 - \lambda_G) k^4\} \alpha_{3,t-1} d_{t-1} + \{1 - (1 - \lambda_G) k^2\} \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2k^2 \sigma_u^2} m(1 - \lambda_G m) \{m + (1 + \lambda_G m) k^2\} \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \quad (16)
\end{aligned}$$

上記(14), (15)式において, 第1項と第3項は各々政府が最適満期構成を決める際の価格要因, 価格(金利)と経済成長率(マクロ経済)との相関要因を表している。一方, 第2項において, $\alpha_{3,t-1} d_{t-1}/g_t$ と $(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} d_{t-2}/g_{t-1})/g_t$ は, 各々経済成長率で割り引いた残存期間2期と1期の既発国債残高を表すから, 第2項は最適構成を決める際に考慮する既発国債の残高要因を示している。

ここで, これらの最適満期構成を解釈する場合に留意すべき点を述べたい。第1点目は, (14), (15)式で表された $\alpha_{1,t}^*$ と $\alpha_{2,t}^*$ は完全な系列解ではないということである。完全な $\{\alpha_{1,t}^*\}$ と $\{\alpha_{2,t}^*\}$ の系列を求めるためには, $\alpha_{3,j} = 1 - \alpha_{1,j} - \alpha_{2,j}$ ($j=t-1, t-2$)と置き換えたとき(14), (15)式で表される $\{\alpha_{1,t}\}$ と $\{\alpha_{2,t}\}$ に関する連立差分方程式を解かなければならない。しかし $\{q_{i,t}\}$ ($i=1, 2, 3$), $\{g_t\}$, $\{d_t\}$ の系列が明らかでないため, この連立差分方程式を解くことはできない。また, $\alpha_{i,t} = \alpha_{i,t-1} = \alpha_{i,t-2} = \alpha_i^*$ ($i=1, 2$)とにおいて定常解を求めることは次の理由から意味がない。

- ① 定常解を求めるために他の外生変数の系列も定常と仮定した場合, Y_t もすべての t で一定だから $\sigma_u^2 = 0$ となる。このとき(14), (15)式の両辺に $\sigma_u^2 (=0)$ をかけると両式とも左辺および右辺第2項が消えてしまい, α_i^* ($i=1, 2$)について解くことができない⁸⁾。
- ② 仮に外生変数の系列を定常と仮定しなければ α_i^* ($i=1, 2$)について解くことができるが, 外生変数の系列が定常ではないという仮定に立った定常解には意味がない。

留意すべき第2点目は, 何らかの方法により現実のデータから推計したパラメータおよび外生変数を(14)–(16)式に代入したとき, 必ずしも

$$0 \leq \alpha_{i,t}^* \leq 1 \quad (i=1, 2, 3) \quad (17)$$

が保証されるわけではないということである。しかしながら, 逆にこの条件を満たす $\alpha_{i,t}^*$ が存在し得ないことも明らかではない。これはあくまで実証の問題である。そこで, 以下では最適構成比が条件(17)を満たすものとして分析を進める。

3. 供給面における最適満期構成の特徴

前項で導出した(14)–(16)式より, 供給面における最適満期構成の特徴として次の命題が導ける(証明は補論を参照)。

[命題S 1]

各国債の価格上昇は当該国債の発行比率を上昇させ, 他の国債のそれを低下させる。

[命題S 2]

$\lambda_G m \rightarrow 1$ の条件下では, t 期における国債発行量の対実質GDP比 d_t の上昇は短期債と中期債の発行比率を低下させ, 長期債の発行比率を上昇させる。ここで, $\lambda_G m \rightarrow 1$ の条件は, d の将来

予想が定常状態に近づく ($m \rightarrow 1$) とき、政府の損失関数におけるリスクへのウェイトも一定 ($((\lambda_G)^i/2 \rightarrow 1/2)$) となることを含意している。

[命題 S 3]

$\lambda_G m \rightarrow 1$ の条件下では、 d_t の予想増減率 m の上昇は短期債の発行比率を低下させ、長期債の発行比率を上昇させる。中期債の発行比率に対する影響は $m > k^2$ のとき低下させ、 $m < k^2$ のとき上昇させる。

[命題 S 4]

残存期間 2 期の既発国債残高 (経済成長率で割引後) に対する残存期間 1 期の既発国債残高 (同) の比率が十分に大きく、かつ $1 - \lambda_G < k^{-2}$ のとき、今期経済成長率 g_t の上昇は短期債の発行比率を上昇させ、中長期債の発行比率を低下させる。

[命題 S 5]

$\lambda_G m \rightarrow 1$ の条件下では、次期経済成長率の予測における変動 σ_u^2 の上昇は短期債の発行比率を低下させ、長期債の発行比率を上昇させる。中期債の発行比率に対する影響は $q_{2,t} - q_{3,t} > \lambda_G^2 k^4 (q_{1,t} - q_{2,t})$ のとき低下させ、 $q_{2,t} - q_{3,t} < \lambda_G^2 k^4 (q_{1,t} - q_{2,t})$ のとき上昇させる。

[命題 S 6]

- ① $\lambda_G m \rightarrow 1$ かつ $k = 1$ の条件下では、経済成長率で割り引いた残存期間 1 期の既発国債残高および残存期間 2 期の既発国債残高が十分に大きければ、将来の経済成長率 k^{-1} の (1 からの) 上昇は短期債の発行比率を低下させ、長期債の発行比率を上昇させる。
- ② ①と同じ条件下で、残存期間 2 期の既発国債残高に対する残存期間 1 期の既発国債残高の比率が十分に大きければ、将来の経済成長率 k^{-1} の (1 からの) 上昇は中期債の発行比率を低下させる。

[命題 S 7]

$\lambda_G k^2 < \lambda_G m < 1$ の条件下では、国債価格 (金利) と経済成長率との相関 $\text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right]$

の上昇は短期債と中期債の発行比率を上昇させ、長期債の発行比率を低下させる⁹⁾。

以上の命題から、短期債の発行環境と長期債の発行環境についていくつかの特徴をあげることができる。第 1 に、財政事情が現在悪化しているまたは将来悪化が予想されるとき、政府は短期債より長期債の発行比率を上昇させたほうが望ましい (命題 S 2, 3)。これは、財政事情が現在悪化しているまたは将来悪化すると予想されるときに短期債を発行すると償還負担がかかると同時に、借換時の金利にリスク・プレミアムが付されることによって、リスクとコストの両面から政府の損失を増大させるためである。ただし、後者の点については、特に長期に亘って既に財政事情が悪化している場合、政府があえて短期債の発行を増加することによって投資家による財政再建への信認が高まり、金利のリスク・プレミアムが低くなる可能性もある¹⁰⁾。

第 2 に、短期的に経済成長率が上昇しているときには短期債の発行比率を上昇させ、長期的にも経済成長率の上昇が予想されるときには長期債のそれを上昇させることが望ましい (命題 S 4, 6)。こ

これは、特にリスク面から見て、経済成長率の上昇・鈍化と財政事情の改善・悪化とが連動していることを考えれば容易に納得できる。

第3に、経済成長に対する不確実性が高いときには長期債の発行比率を上昇させることが望ましい（命題S5）。これは、第1の特徴と同様に、経済成長の不確実性が高いときに短期債を発行すれば短期的に償還と借換の負担がかかり、リスクとコストの両面から政府の損失を増大させるためである。

第4に、国債価格（金利）と経済成長率との相関が高いときは、短期債の発行比率を上昇させることが望ましい（命題S7）。これは、両者の相関が高いということは経済成長率が鈍化して国債発行量を増加しなければならない場合、発行金利にリスク・プレミアムが付されやすいことを含意しているため、長期債の発行増加はコスト面から損失を増大させる。また、経済面でもクラウドディング・アウト効果が大きいというデメリットもある。

以上で最適供給の分析を終えるが、1つだけ特筆しておきたい点がある。本稿のモデルでは、政府は既発国債の買戻消却やリオープンなどの残高操作を行わないことを仮定している。しかし、仮にそれができると仮定した場合、(14)–(16)式から、残存期間1期の既発国債残高（経済成長率で割引後）の減少（買戻消却）は、 $1 - \lambda_G < k^{-2}$ の条件下で中期債および長期債の発行比率を低下させる一方、残存期間2期の既発国債残高（同）の減少は短期債および長期債のそれを低下させる。この結果についてはこれ以上立ち入らないが、こうした国債管理当局や中央銀行による発行残高または市場保有残高の操作という面から国債管理政策を分析することは重要であり、その場合にも本稿のモデルは有用である。

Ⅲ. 投資家による最適需要

本節では、標準的なポートフォリオ理論に基づき、新発国債への投資に係る投資家の効用が最大となる需要ベースでの最適満期構成（最適投資ポートフォリオ）を導出する。

1. 投資家行動の仮定

需要面における新発国債の最適満期構成を導出するために、次のような投資家行動を仮定する。

投資家は各期において国債の発行価格、総発行量を所与とした上で、新発国債に対する1期間のポートフォリオを考える。ここで、ポートフォリオの対象を「新発国債」に限定したのは、本稿の問題意識が「国債管理政策としての最適発行満期構成はどうあるべきか」という点にあり、政府が既発国債の買戻消却またはリオープンを行わなければ既発国債への需要がどうであろうとその残高（供給）は変化し得ないためである。また、ポートフォリオ期間を1期間としたのは、短期債の満期が1期であるため、1期ごとに投資家がポートフォリオを見直すとして仮定した。投資家は次期以降、残存期間が1期または2期となった既発国債を保有することも売却することも自由である。ただし、本稿では同質の投資家を仮定するため、既発国債を売却する場合、その相手先は中央銀行とする。これは、

中央銀行が国債価格（金利）を適正に維持するため既発国債のオペレーションを行うことを含意する。

国債の取引コストがないと仮定すると、上記ポートフォリオの予想収益率 P_{t+1}^e は次のように表せる。

$$P_{t+1}^e = \left\{ \beta_{1,t} \left(\frac{1 - q_{1,t}}{q_{1,t}} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{q_{2,t,t+1}^e - q_{2,t}}{q_{2,t}} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{q_{3,t,t+1}^e - q_{3,t}}{q_{3,t}} \right) \right\} D_t \quad (18)$$

ここで、

$\beta_{i,t}$: 総発行量 D_t に占める i 期債 ($i = 1, 2, 3$) の発行構成比 $\left(0 \leq \beta_{i,t} \leq 1, \sum_{i=1}^3 \beta_{i,t} = 1 \right)$

$q_{i,t,t+1}$: t 期に投資した i 期債の 1 期後の実質価格

であり、上付き文字 e は投資家の予想を表す。

さらに、(18)式の両辺を実質 GDP (Y_t) で除した、所得に対するポートフォリオの予想収益率 P_{t+1}^e

$$p_{t+1}^e \equiv \frac{P_{t+1}^e}{Y_t} = \left\{ \beta_{1,t} \left(\frac{1 - q_{1,t}}{q_{1,t}} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{q_{2,t,t+1}^e - q_{2,t}}{q_{2,t}} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{q_{3,t,t+1}^e - q_{3,t}}{q_{3,t}} \right) \right\} d_t \quad (19)$$

によって投資家の効用が決まると仮定し、その効用関数を

$$U_t \equiv E[p_{t+1}^e] - \frac{\lambda_I}{2} \text{Var}[p_{t+1}^e] \quad (20)$$

と定義する。ここで λ_I は投資家の危険回避度であり

$$0 < \lambda_I < 1 \quad (21)$$

と仮定する。

2. 最適需要構成

前項の仮定により、投資家の効用最大化問題は次のように定式化できる。

$$\text{Max}_{\beta_{1,t}, \beta_{2,t}} U_t$$

$$\text{s.t. (19)式, } \beta_{3,t} = 1 - \beta_{1,t} - \beta_{2,t}, \quad 0 \leq \beta_{1,t} \leq 1 \quad (i = 1, 2), \quad \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \leq 1 \quad \forall t$$

この最適化問題を $E[q_{i,t,t+1}^e] = E[q_{i,t,t+1}]$ の条件の下で解くと、1 階の条件は次のようになる。

$$\frac{\partial U_t}{\partial \beta_{1,t}} = \left\{ \left(\frac{1 - q_{1,t}}{q_{1,t}} \right) - \left(\frac{E[q_{3,t,t+1}] - q_{3,t}}{q_{3,t}} \right) \right\} d_t + \lambda_I (1 - \beta_{1,t} - \beta_{2,t}) d_t^2 \frac{\text{Var}[q_{3,t,t+1}]}{q_{3,t}^2} = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_t}{\partial \beta_{2,t}} &= \left\{ \left(\frac{E[q_{2,t,t+1}] - q_{2,t}}{q_{2,t}} \right) - \left(\frac{E[q_{3,t,t+1}] - q_{3,t}}{q_{3,t}} \right) \right\} d_t \\ &\quad - \lambda_I d_t^2 \left\{ \beta_{2,t} \frac{\text{Var}[q_{2,t,t+1}]}{q_{2,t}^2} - (1 - \beta_{1,t} - \beta_{2,t}) \frac{\text{Var}[q_{3,t,t+1}]}{q_{3,t}^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

これらの 1 階の条件を $\beta_{1,t}$ と $\beta_{2,t}$ について解くと

$$\beta_{1,t}^* = 1 - \frac{1}{\lambda_I d_t} \left\{ \frac{(E[q_{2,t,t+1}] - q_{2,t}) - (1 - q_{1,t})}{\text{Var}[q_{2,t,t+1}]} q_{2,t}^2 + \frac{(E[q_{3,t,t+1}] - q_{3,t}) - (1 - q_{1,t})}{\text{Var}[q_{3,t,t+1}]} q_{3,t}^2 \right\} \quad (24)$$

$$\beta_{2,t}^* = \frac{(E[q_{2,t,t+1}] - q_{2,t}) - (1 - q_{1,t})}{\lambda_I d_t \text{Var}[q_{2,t,t+1}]} q_{2,t}^2 \quad (25)$$

となる¹¹⁾。

ここで、 i 期債 ($i = 1, 2, 3$) を 1 期間保有した場合の実質保有収益率 (実質保有期間利回り) を次のように定義する。

$$Hr_{t+1}^{(i,1)} \equiv \frac{q_{i,t,t+1} - q_{i,t}}{q_{i,t}}$$

ただし、 $E[Hr_{t+1}^{(1,1)}] \equiv r_{t+1}^{(1)}$ は確定値である。この実質保有収益率を用いて (24), (25) 式を書き換えると、

$$\beta_{1,t}^* = 1 - \frac{1}{\lambda_I d_t} \left(\frac{E[Hr_{t+1}^{(2,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{\text{Var}[Hr_{t+1}^{(2,1)}]} + \frac{E[Hr_{t+1}^{(3,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{\text{Var}[Hr_{t+1}^{(3,1)}]} \right) \quad (26)$$

$$\beta_{2,t}^* = \frac{E[Hr_{t+1}^{(2,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{\lambda_I d_t \text{Var}[Hr_{t+1}^{(2,1)}]} \quad (27)$$

となる。このとき定義より

$$\beta_{3,t}^* = 1 - (\beta_{1,t}^* + \beta_{2,t}^*) = \frac{E[Hr_{t+1}^{(3,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{\lambda_I d_t \text{Var}[Hr_{t+1}^{(3,1)}]} \quad (28)$$

である。

(27), (28) 式は、 i 期債 ($i = 2, 3$) への最適投資比率が i 期債と 1 期債に各々 1 単位 (投資金額は $q_{i,t}$, $q_{1,t}$) 投資した場合の期待収益率の差 (超過収益率) によって決まることを示している。つまり、超過収益率が正の場合のみ中長期債に投資するのである。一方、中長期債への投資に係る超過収益率がともにゼロのとき (金利の期間構造に関する純粋期待理論が厳密に成立するときにそれはゼロとなる) 短期債に対してのみ投資される。これは短期債と中長期債の期待収益率が等しい場合にいずれの国債への投資は無差別であるにもかかわらず、危険回避的な投資家は利益が確定している短期債に投資することを含意している。

(26)–(28) 式より、需要面における最適満期構成の特徴として次の命題が導ける (証明は補論を参照)。

[命題 D 1]

- ① 各国債への投資に係るリスク (各国債の収益率の変動) を所与としたとき、各国債の期待収益率の上昇は当該国債への投資比率を上昇させる。
- ② 各国債への投資に係る期待収益率を所与としたとき、 i 期債 ($i = 2, 3$) に係る収益率変動の上昇は当該国債への投資比率を低下させ、 j 期債 ($i \neq j$) への投資比率を変化させない一方で、1 期債への投資比率を上昇させる。

[命題 D 2]

国債の総発行量が増加 (または経済環境の悪化により実質 GDP が減少) することによって総発行量の対実質 GDP 比率 d_t が上昇すると、中長期債への投資比率は低下し、1 期債へのそれは上昇

する。

〔命題D 1〕はポートフォリオ理論に照らして常識的な結果である。①は期待収益率の上昇を現在価格 $q_{i,t}$ の下落によるものと解釈すれば、価格の下落が需要の増加につながることを示している。②は投資家の危険回避的な性質を表している。一方、〔命題D 2〕は前節で述べた〔命題S 2〕と対照的であり興味深い。つまり、国債の発行量を増加せざるを得ないとき、政府は短期的な償還負担およびそれに伴う税率引き上げを避けるために長期債の発行比率を上昇させるのに対して、投資家は政府に対する中長期的観点からの信用リスク増大を懸念して中長期債より短期債への選好を強める。したがって、この場合には満期ごとに（特に短期債と長期債で）需給のミスマッチが生じることとなるが、この問題については次節で分析する。

IV. 均衡経路と不均衡分析

本節では、政府の最適供給と投資家の最適需要に基づいて満期構成の均衡経路を導出し、その後、前節で留保した短期債と長期債で需給が不均衡となった場合を分析する。

1. 均衡経路

前二節での分析より、満期構成の均衡条件はすべての t で

$$\alpha_{i,t}^* = \beta_{i,t}^* \quad (i = 1, 2)$$

となることである。均衡解を $w_{i,t}^*$ とおくと、(14)、(15)式の右辺第2項に(27)、(28)式を適用することによって、均衡経路は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} w_{1,t}^* = & \frac{1}{1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4} \left[\frac{1}{\lambda_G \sigma_u^2 d_t} \{ \lambda_G k^2 (q_{1,t} - q_{2,t}) + (q_{1,t} - q_{3,t}) \} \right. \\ & + \frac{1}{\lambda_I g_t d_t} \left[\lambda_G^2 k^4 \frac{E[HR_t^{(3,1)}] - r_t^{(1)}}{\text{Var}[HR_t^{(3,1)}]} \right. \\ & \quad \left. - (1 + \lambda_G k^2) \left\{ \frac{E[HR_t^{(2,1)}] - r_t^{(1)}}{\text{Var}[HR_t^{(2,1)}]} + \frac{E[HR_{t-1}^{(3,1)}] - r_{t-1}^{(1)}}{\text{Var}[HR_{t-1}^{(3,1)}]} \left(\frac{1}{g_{t-1}} \right) \right\} \right] \\ & \left. + \frac{1}{2 \sigma_u^2} m(1 - \lambda_G m) \{ 1 + (m + k^2) \lambda_G \} \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \right] \quad (29) \\ w_{2,t}^* = & \frac{1}{1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4} \left[\frac{1}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 d_t} \{ (q_{2,t} - q_{3,t}) - \lambda_G^2 k^4 (q_{1,t} - q_{2,t}) \} \right. \\ & + \frac{1}{\lambda_I g_t d_t} \left[- (1 + \lambda_G k^4) \frac{E[HR_t^{(3,1)}] - r_t^{(1)}}{\text{Var}[HR_t^{(3,1)}]} \right. \\ & \quad \left. + k^2 \left\{ \frac{E[HR_t^{(2,1)}] - r_t^{(1)}}{\text{Var}[HR_t^{(2,1)}]} + \frac{E[HR_{t-1}^{(3,1)}] - r_{t-1}^{(1)}}{\text{Var}[HR_{t-1}^{(3,1)}]} \left(\frac{1}{g_{t-1}} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2k^2 2\sigma_u^2} m(1 - \lambda_G m)(m - \lambda_G k^4) \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \quad (30)$$

$$w_{3,t}^* = 1 - w_{1,t}^* - w_{2,t}^* \quad (31)$$

導出した均衡経路に対してその定常均衡解を求めることは、最適供給の定常均衡解の場合と同様の理由 ($\sigma_u^2 = 0$) からできない。その代わり、以下では金利の期間構造における純粋期待理論が常に成立する場合の均衡経路を擬似的な定常均衡解とみなして、それが存在するための条件を考えてみよう。

純粋期待理論が常に成立するとき、前節で導出した需要条件より、

$$r_t^{(1)} = E[Hr_t^{(2,1)}] = E[Hr_t^{(3,1)}] \quad \forall t \quad (32)$$

$$\beta_{1,t}^* = 1, \quad \beta_{2,t}^* = \beta_{3,t}^* = 0 \quad \forall t \quad (33)$$

となる。したがって、政府が需要を考慮して均衡経路を維持しようとすれば常に短期債しか発行しないから、

$$q_{2,t} = q_{3,t} = 0 \quad \forall t \quad (34)$$

であり、しかもこの場合には 2, 3 期先までの経済見通しも不要となるため

$$k = 0 \quad (35)$$

とおける。

以上の条件を(29), (30)式に適用すると、純粋期待理論が常に成立する場合の均衡経路は次の条件を満たさなければならない¹²⁾。

$$1 = \frac{q_{1,t}}{\lambda_G \sigma_u^2 d_t} + \frac{1}{2\sigma_u^2} (1 - \lambda_G m)(1 + \lambda_G m) \text{Cov}_t \left[q_{1,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \quad (36)$$

$$0 = \frac{1}{2\sigma_u^2} m^2 (1 - \lambda_G m) \text{Cov}_t \left[q_{1,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \quad (37)$$

(37)式より

$$(1 - \lambda_G m) \text{Cov}_t \left[q_{1,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] = 0 \quad (38)$$

だから、これを(36)式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{1,t}} &= 1 + r_{t+1}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_G \sigma_u^2 d_t} \\ \therefore r_{t+1}^{(1)} &= \frac{1}{\lambda_G \sigma_u^2 d_t} - 1 \end{aligned} \quad (39)$$

以上の分析より、純粋期待理論が成立する場合に均衡経路が存在するための条件は

$$\lambda_G m = 1 \text{ または } \text{Cov}_t \left[q_{1,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] = 0 \quad (40)^{13)}$$

かつ

$$0 < \lambda_G \sigma_u^2 d_t < 1 \quad (41)$$

となる。仮に $d_t = \bar{d}$ (一定) でかつ条件(41)が満たされるほど低いとき、(39)式より均衡金利は

$$r^{(1)} = \frac{1}{\lambda_G \sigma_u^2 \bar{d}} - 1$$

と決まる。このとき $q_{1,t}$ もすべての t で一定となるから、条件(40)の $\text{Cov}_t \left[q_{1,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] = 0$ は自動的に満たされる。

以上に示した分析結果のポイントは、純粋期待理論が成立する場合でも均衡経路の存在は自明ではなく、上述した条件が必要だということである。黒田 [1982] が指摘しているように、国債発行コストの最小化（および流動性コントロールによる景気安定化）の目標の下では、純粋期待理論が成立している場合、政府による国債の発行満期構成の選択は投資家のポートフォリオと同様に無差別であろう。つまり、政府が短期債のみを発行することによって均衡経路の存在は自明となる。しかし、発行コストの最小化に加え将来の税率変動に対するリスクも考慮したとき、純粋期待理論が成立していても政府による満期構成の選択は無差別とならず、このため均衡経路が存在するためには上記の条件、特に d_t が低水準で安定していることが必要となるのである。このことは、前節の最後に留保した問題も含め、純粋期待理論が成立するか否かに拘らず、満期ごとに需給がミスマッチしたとき、つまり需給不均衡についての分析が重要であることを示唆している。そこで、次にこの問題を考察しよう。

2. 不均衡分析

前二節で示したように、政府と投資家の満期構成に対する選択はパラメータ、外生変数によって変化する。したがって、満期構成が均衡経路を辿る可能性は極めて小さく、むしろ不均衡分析が重要である。特にわが国の現状に照らせば、国債発行量の対実質 GDP 比 d_t は高く、前述したように政府は短期的な償還負担を避けるために長期債の発行比率を上昇させようとする一方、投資家は中長期的な観点からの信用リスクを考慮して短期債を選好する。このような満期構成の需給不均衡が生じる場合、政府はいかなる政策を採るべきか。以下ではこの問題について考察する。

(1) 仮定

分析のために次のような仮定をおく。

[仮定 1]

$t-1$ 期まで満期構成の需給は均衡していたが、 t 期に政府は所得税率を据え置くために国債の発行量、つまり d_t を引き上げざるを得なくなった。この d_t に対して政府は投資家の各国債に対する需要を

$$\beta_{i,t} = (26) - (28) \text{ 式の各右辺} \quad (42)$$

と予想した上で、各国債の供給を需要に合わせるか、または

$$\alpha_{i,t} = (29) - (31) \text{ 式の各右辺} \quad (43)^{(14)}$$

によって決定するかを選択する。仮に、政府が供給を需要に合わせて決定すれば満期構成は t 期も均衡経路上にあるから、(42)式左辺の $\beta_{i,t}$ は

$$\beta_{i,t} (= \alpha_{i,t}) = w_{i,t}^* \quad (44)$$

と同義である。

ここで注意すべきは、前二節において最適供給と最適需要を導出するとき国債価格 $q_{i,t}$ ($i=1, 2, 3$) は所与と仮定しているから、(42), (43)式の右辺に現れる価格は各々の場合において想定される需給均衡価格だということである。そこで、それらの価格を各々、 $q_{i,t}^*$, $q_{i,t}^0$ と区別する。

[仮定 2]

[仮定 1] の(43)式に基づいて政府が各国債の発行比率を決定した場合、中期債については需給が一致したが、短期債は需要超過、長期債は供給超過になったと仮定する。つまり、

$$\alpha_{1,t} < w_{1,t}^*, \quad \alpha_{2,t} = w_{2,t}^*, \quad \alpha_{3,t} > w_{3,t}^* \quad (45)$$

このとき価格は

$$q_{1,t}^0 < q_{1,t}^*, \quad q_{2,t}^0 = q_{2,t}^*, \quad q_{3,t}^0 > q_{3,t}^* \quad (46)$$

となろう。

[仮定 3]

t 期の税率は満期構成の需給が一致するか否かに係わらず不変なので、国債発行による調達額も一定である。つまり

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 q_{i,t}^0 \alpha_{i,t} \right) D_t &= \left(\sum_{i=1}^3 q_{i,t}^* w_{i,t}^* \right) D_t \\ \Rightarrow \sum_{i \neq 2} q_{i,t}^0 \alpha_{i,t} &= \sum_{i \neq 2} q_{i,t}^* w_{i,t}^* \quad (\because (45), (46) \text{式}) \end{aligned} \quad (47)$$

[仮定 4]

満期構成の不均衡は t 期のみで、 $t+1$ 期以降は均衡経路に戻ると政府は想定する。したがって

$$\alpha_{i,t+j} = w_{i,t+j}^*, \quad q_{i,t+j}^0 = q_{i,t+j}^* \quad (i=1, 2, 3; j \geq 1) \quad (48)$$

である。

(2) 政府の国債発行(満期)政策

[仮定 1] により、政府は満期構成を需要に合わせて $\alpha_{i,t} = w_{i,t}^*$ とするか、または(29)–(31)式の各右辺にしたがって決定するかを選択するが、そのとき基準となるのが各満期構成を選択した場合の損失 L_t の大小である。満期構成を $\alpha_{i,t} = w_{i,t}^*$ としたときの損失を、 $L(w_t^*, q_t^*)$, (29)–(31)式右辺によって決定したときのそれを $L(\alpha_t, q_t^0)$, とすると、 $\Delta L_t \equiv L(\alpha_t, q_t^0) - L(w_t^*, q_t^*)$ は(4)'式および上記諸仮定より次のように計算することができる。なお、損失関数の定義において太文字 x_t は $x_{i,t}$ を要素とするベクトルを表す。

$$\begin{aligned} \Delta L_t &= \frac{\lambda_G}{2} (\alpha_{1,t} - w_{1,t}^*) d_t \left[\sigma_u^2 \left\{ (\alpha_{1,t} + w_{1,t}^*) d_t + 2 w_{2,t-1}^* \frac{d_{t-1}}{g_t} + 2 w_{3,t-2}^* \frac{d_{t-2}}{g_t g_{t-1}} \right\} \right. \\ &\quad \left. - m d_t \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{\lambda_G^3}{2}k^2(\alpha_{3,t}-w_{3,t}^*)d_t\left\{k^2\sigma_u^2(\alpha_{3,t}+w_{3,t}^*)d_t-m^3d_t\text{Cov}_t\left[q_{3,t+1},\frac{1}{g_{t+1}}\right]\right\}$$

ここで、[仮定1]より $t-1$ 期以前は満期構成が均衡経路上にあるから $w_{2,t-1}^*=\alpha_{2,t-1}$ および $w_{3,t-2}^*=\alpha_{3,t-2}$ が成立している。

[仮定2]の(45)式より、

$$\alpha_{1,t}-w_{1,t}^*=\alpha_{3,t}+w_{3,t}^*, \quad \alpha_{1,t}+w_{1,t}^*=2(1-w_{2,t}^*)-(\alpha_{3,t}+w_{3,t}^*)$$

だから、これらを上式に代入して整理すると

$$\begin{aligned}\Delta L_t = & \frac{\lambda_G}{2}(\alpha_{3,t}-w_{3,t}^*)d_t\left[(1+\lambda_G^2k^4)\sigma_u^2(\alpha_{3,t}+w_{3,t}^*)d_t\right. \\ & \left.+(1+\lambda_G^2k^2m^2)md_t\text{Cov}_t\left[q_{3,t+1},\frac{1}{g_{t+1}}\right]\right. \\ & \left.-2\sigma_u^2\left\{(1-w_{2,t}^*)d_t+w_{2,t-1}^*\frac{d_t-1}{g_t}+w_{3,t-2}^*\frac{d_t-2}{g_tg_{t-1}}\right\}\right] \quad (49)\end{aligned}$$

上式において、仮定(45)より $\alpha_{3,t}-w_{3,t}^*>0$ だが、[]内の符号が不明なため ΔL_t の符号は決定できない。しかしながら、最適供給の定義より α_t は q_t^0 を所与として損失関数 L_t を最小にする満期構成であるから $\Delta L_t<0$ （したがって(49)式右辺の[]内は負）と仮定できよう¹⁵⁾。損失の大小から判断すれば、政府は(43)式に基づいて満期構成（最適供給）を決定すべきなのであろうが、ここで政府が現実を考えなければならない国債発行政策は、需要を考慮せず d_t の上昇に基づいて長期債の供給を増加させ、結果としてその価格に相当のリスク・プレミアムが付されることになっても最適供給に固執すべきかという問題である。そこで、満期構成の需給ギャップと価格差との関係を考え、それに影響を与えるパラメータまたは外生変数の変化に対する ΔL_t の変化を考えてみよう。

[仮定2]より中期債の構成比は t 期でも均衡経路上にあるから、(15)、(30)式に $\alpha_{2,t-1}=w_{2,t-1}^*$ と $\alpha_{3,t-j}=w_{3,t-j}^*$ ($j=1, 2$)を考慮することによって

$$\begin{aligned}\alpha_{2,t}-w_{2,t}^* &= \frac{1}{\lambda_G^2k^2\sigma_u^2(1+\lambda_Gk^2+\lambda_G^2k^4)}d_t\left[\{(q_{2,t}^0-q_{2,t}^*)-(q_{3,t}^0-q_{3,t}^*)\}\right. \\ & \quad \left.-\lambda_G^2k^4\{(q_{1,t}^0-q_{1,t}^*)-(q_{2,t}^0-q_{2,t}^*)\}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda_G^2k^2\sigma_u^2(1+\lambda_Gk^2+\lambda_G^2k^4)}d_t\{- (q_{3,t}^0-q_{3,t}^*)-\lambda_G^2k^4(q_{1,t}^0-q_{1,t}^*)\} \quad (\because \text{仮定(46)}) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成立するはずである。したがって

$$q_{3,t}^0-q_{3,t}^*=-\lambda_G^2k^4(q_{1,t}^0-q_{1,t}^*) \quad (50)$$

となる。この式より、長期債の需給が一致しなかった場合のリスク・プレミアムは $\lambda_G^2k^4$ の大きさに反映される。つまり、ここでの問題意識に照らして言えば、政府が d_t を上昇させ、そのために長期債の需要減少が予想されるにもかかわらず最適供給の論理に基づいて長期債の供給を増加させたときに、その価格に生じるリスク・プレミアムは政府の損失関数におけるリスクの（コストに対する）ウ

エイト λ_G が大きいほど、または将来 (2, 3 期先) の経済成長見通し (k^{-1}) が低いほど大きくなることを示している。したがって、前述した損失の差 ΔL_t を評価する場合に重要なポイントとなるパラメータは $\lambda_G k^4$ であり、

$$C \equiv \lambda_G k^2$$

とおく。

一方、[仮定 3] の (47) 式は恒等的に成立するから、この式を変形して (50) 式を用いると、 $\alpha_{3,t}$ は $w_{3,t}^*$ に対して次の関係が成立するはずである。

$$\begin{aligned} \alpha_{3,t} &= \{1 - (1 + \lambda_G k^4) w_{3,t}^*\} Q_t + w_{3,t}^* \\ &= \{1 - (1 + C^2) w_{3,t}^*\} Q_t + w_{3,t}^* \end{aligned} \quad (51)$$

なお、 $Q_t \equiv \frac{q_{1,t}^0 - q_{1,t}^*}{q_{1,t}^0 - q_{3,t}^0}$ と定義している。ここで、イールド・カーブの前提より $q_{1,t}^0 > q_{3,t}^0$ だから、[仮定

2] より $q_{1,t}^0 > q_{1,t}^*$ のとき $Q_t > 0$ となる。したがって、 $\alpha_{3,t} > w_{3,t}^*$ となるためには、

$$1 - (1 + C^2) w_{3,t}^* > 0 \Rightarrow w_{3,t}^* < (1 + C^2)^{-1} \quad (52)$$

でなければならない。さらに、(51) 式より $\frac{\partial \alpha_{3,t}}{\partial C} = -2 w_{3,t}^* Q_t < 0$ となることを確認しておこう。これ

は、長期債の発行に係るリスク・プレミアムが大きいほど (つまり、 λ_G が大きいまたは k^{-1} が低いほど) 政府が長期債を発行するインセンティブが低くなることを示している。

(51) 式を (49) 式に代入し、さらに C と Q_t を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} \Delta L_t &= \frac{\lambda_G}{2} \{1 - (1 + C^2) w_{3,t}^*\} Q_t d_t \left[(1 + C^2) \sigma_u^2 d_t [1 - (1 + C^2) w_{3,t}^*] Q_t + 2 w_{3,t}^* \right] \\ &\quad + (1 - \lambda_G C m^2) m d_t \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \\ &\quad - 2 \left\{ (1 - w_{2,t}^*) d_t + w_{2,t-1}^* \frac{d_{t-1}}{g_t} + w_{3,t-2}^* \frac{d_{t-2}}{g_t g_{t-1}} \right\} \sigma_u^2 \end{aligned} \quad (53)$$

ここで、 λ_G を一定とした上で (53) 式を C で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta L_t}{\partial C} &= -2 \left\{ \frac{C w_{3,t}^*}{1 - (1 + C^2) w_{3,t}^*} \right\} \Delta L_t \\ &\quad + \frac{\lambda_G}{2} Q_t \{1 - (1 + C^2) w_{3,t}^*\} d_t^2 \\ &\quad \times \left\{ 2 C \sigma_u^2 (2 \alpha_{3,t} - Q_t) - \lambda_G m^3 \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

定義より Q_t は $q_{1,t}^0$ と $q_{1,t}^*$ との乖離を反映したものであるが、ここでは短期債は需要超過を仮定しているためその乖離は極めて小さいものと考えられる。したがって、 Q_t の値は $2 \alpha_{3,t}$ と比べてかなり小さい

とみなしてもよいだろう。さらに、 $\text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right]$ も無視しえるほど小さければ、結果として

54式の第2項後半の { } 内は正となる。一方、前述の議論から $\Delta L_t < 0$ とすれば、52)、54式より

$$\frac{\partial \Delta L_t}{\partial C} > 0 \quad (55)$$

が示される。

前述したように $\Delta L_t < 0$ と仮定しても、55式は需給不均衡に伴う長期債価格のリスク・プレミアムが大きくなるほど、 ΔL_t の絶対値が小さくなることを示している。つまり、財政政策により大量の国債を発行せざるを得なく、かつ長期債の発行増加によって長期債価格のリスク・プレミアムが極めて大きくなる場合、最適供給をとっても需要に合わせても損失のレベルは大きく異ならない可能性が高くなる。その場合には、需要に合わせて発行構成比を決める、つまり長期債の発行を抑制して短期債の発行を増加させる方が（多少の損失を犠牲にしても）長期債価格の余計なリスク・プレミアムを抑えられるためコスト最小化の面では望ましいであろう¹⁶⁾。

V. 結 論

本稿では、国債管理政策の主目的であるコスト最小化とリスク抑制を達成するための発行（満期）政策を理論的に考察した。分析から得られた重要な結論は以下の2点である。第1に、金利の期間構造における純粋期待理論が常に成立する場合でも、発行コストの最小化に加え課税変化に対するリスク抑制を国債管理政策の目的に含めたときには、国債発行の満期構成は管理政策の目的に対して必ずしも無差別ではない。発行コストの最小化のみを目的とした場合には、純粋期待理論の成立は満期構成の無差別を含意するから、政府および中央銀行によるイールド・カーブの管理が国債管理政策を意味することとなる。このことは、たとえ課税変化に対するリスクを考慮した場合でも、国債発行量の対実質GDP比 d が低水準で安定しているときには当てはまる。しかし、 d が極めて大きいときには、将来の課税変化のリスクを抑制するための最適満期構成を政府は考えなければならない。

第2に、財政事情が悪化しているまたはそれが見込まれる場合には、政府は短期債の発行比率を上昇させることも有効な政策となりうる。経済成長の鈍化や国債発行量の増大など現在または将来の財政事情に対する不確実性が増す場合、各国債の価格を所与として需給ギャップを考えなければ、政府は長期債の発行比率を上昇させる一方、投資家は短期債への投資比率を上昇させることが最適な選択である。しかし、この満期構成の需給ギャップにより長期債価格（金利）に対するリスク・プレミアムが大きくなる場合には、政府は財政再建に対する市場の信認を維持することによってそのリスク・プレミアムを抑え、さらには市場による長期債の未消化を回避するためにも需要に合わせて短期債の発行比率を上昇させることが望ましい。

今後の課題としては次の2点が挙げられる。第1に、上述した第2の結論を実証することである。Missale [1999, pp. 185-192] は、OECD17カ国を対象とした分析で政府債務残高の対名目GDP比が高い国ほど満期構成のデュレーションが短いという関係が有意に成立することを示した。しかしながら、この分析の対象期間は1960-95年であり、特にヨーロッパでは統一通貨ユーロの導入に伴いその

後も各国の財政規律は強化されていることから、主要先進国においてこの関係が96年以降も見出せるかを実証することは重要である。

第2の課題は流通市場と国債発行との関係をより掘り下げることである。本稿のモデルでは、価格は市場の需給で決まり政府と投資家にとっては所与であること、政府が一度満期構成を決定し国債を発行したらその償還まで買戻消却やリオープンなどの残高操作を行わないことを仮定した。しかし、現実には政府はこうした残高操作を行っている場合もあり、また中央銀行のオペレーションによる市場保有の残高操作も行われている。こうした市場に流通する残高の変化は国債価格の変化を通じて政府の満期政策に影響を与えよう¹⁷⁾。したがって、政府の発行（満期）政策を考える上でも、市場残高の操作が国債の流通価格に与える影響を考察することは重要な課題である。

補論 命題の証明

1. 最適供給に関する命題

[命題S 1]

本論の(14)–(16)式を各々 q_{it} ($i = 1, 2, 3$) で偏微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_{1,t}^* : \frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial q_{1,t}} &= \frac{1 + \lambda_G k^2}{\lambda_G \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} > 0 \\ \frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial q_{2,t}} &= -\frac{\lambda_G k^2}{\lambda_G \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} < 0 \\ \frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial q_{3,t}} &= -\frac{1}{\lambda_G \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} < 0 \\ \alpha_{2,t}^* : \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial q_{1,t}} &= -\frac{\lambda_G^2 k^4}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} < 0 \\ \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial q_{2,t}} &= \frac{1 + \lambda_G^2 k^4}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} > 0 \\ \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial q_{3,t}} &= -\frac{1}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} < 0 \\ \alpha_{3,t}^* : \frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial q_{1,t}} &= -\frac{\lambda_G k^4}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} < 0 \\ \frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial q_{2,t}} &= -\frac{1}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} < 0 \\ \frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial q_{3,t}} &= \frac{1 + \lambda_G k^2}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} > 0 \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

[命題S 2]

本論の(14)–(16)式を d_t で偏微分し、 $\lambda_G m \rightarrow 1$ で評価すると次のようになる。

$$\frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial d_t} \rightarrow -\frac{\alpha_{1,t}^*}{d_t} < 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial d_t} \rightarrow -\frac{\alpha_{2,t}^*}{d_t} < 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial d_t} \rightarrow \frac{\alpha_{1,t}^* + \alpha_{2,t}^*}{d_t} > 0$$

(Q.E.D)

[命題 S 3]

本論の(14), (16)式を m で偏微分し, $\lambda_G m \rightarrow 1$ で評価すると次のようになる。

$$\frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial m} \rightarrow -\frac{2 + \lambda_G k^2}{2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4)} \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] < 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial m} \rightarrow \frac{m + 2k^2}{2k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4)} \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right] > 0$$

また, (15)式を m で偏微分し, $\lambda_G m \rightarrow 1$ で評価すると

$$\frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial m} \rightarrow -\frac{m^2 - k^4}{2mk^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4)} \text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right]$$

したがって,

$$m > k^2 \text{ のとき } \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial m} > 0$$

$$m < k^2 \text{ のとき } \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial m} < 0$$

(Q.E.D)

[命題 S 4]

本論の(14)–(16)式を g_t で偏微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial g_t} = & -\frac{1}{(1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t g_t^2} \\ & \times \left\{ \lambda_G^2 k^4 \alpha_{3,t-1} d_{t-1} - (1 + \lambda_G k^2) \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{S 4-1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial g_t} = & -\frac{1}{(1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t g_t^2} \\ & \times \left\{ -(1 + \lambda_G k^4) \alpha_{3,t-1} d_{t-1} + k^2 \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{S 4-2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial g_t} = & -\frac{1}{(1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t g_t^2} \left[\left\{ 1 + \lambda_G (1 - \lambda_G) k^4 \right\} \alpha_{3,t-1} d_{t-1} \right. \\ & \left. - \{ (1 - \lambda_G) k^2 - 1 \} \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{S 4-3})$$

ここで,

$$A \equiv \frac{\text{残存期間 1 期の既発国債残高 (経済成長率で割引後)}}{\text{残存期間 2 期の既発国債残高 (同)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{g_t} \left\{ \alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \left(\frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right\}}{\alpha_{3,t-1} \left(\frac{d_{t-1}}{g_t} \right)}$$

$$= \frac{\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \left(\frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right)}{\alpha_{3,t-1} d_{t-1}}$$

と定義すると、 A が十分に大きく $A > \frac{1 + \lambda_G k^4}{k^2}$ のとき、(S 4-2) 式より

$$\frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial g_t} < 0$$

となる。

また、 $A > \frac{1 + \lambda_G k^4}{k^2}$ のとき $A > \frac{\lambda_G^2 k^4}{1 + \lambda_G k^2}$ が成立するから、(S 4-1 式) より

$$\frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial g_t} > 0$$

さらに、 $1 - \lambda_G < \frac{1}{k^2}$ の条件下では、仮定(5)より

$$\lambda_G (1 - \lambda_G) k^4 + 1 > 0 \text{ かつ } -\{(1 - \lambda_G) k^2 - 1\} > 0$$

だから、(S 4-3) 式より

$$\frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial g_t} < 0$$

が成立する。

(Q.E.D)

[命題 S 5]

本論の(14)、(16)式を σ_u^2 で偏微分し、 $\lambda_G m \rightarrow 1$ で評価すると次のようになる。

$$\frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial \sigma_u^2} \rightarrow - \frac{1}{\lambda_G \sigma_u^4 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} \{ \lambda_G k^2 (q_{1,t} - q_{2,t}) + (q_{1,t} - q_{3,t}) \} < 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial \sigma_u^2} \rightarrow \frac{1}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^4 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} \{ \lambda_G k^2 (q_{1,t} - q_{3,t}) + (q_{2,t} - q_{3,t}) \} > 0$$

また、(15)式を σ_u^2 で偏微分し、 $\lambda_G m \rightarrow 1$ で評価すると

$$\frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial \sigma_u^2} \rightarrow - \frac{1}{\lambda_G^2 k^2 \sigma_u^4 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t} \{ (q_{2,t} - q_{3,t}) - \lambda_G^2 k^4 (q_{1,t} - q_{2,t}) \}$$

だから、

$$q_{2,t} - q_{3,t} > \lambda_G^2 k^4 (q_{1,t} - q_{2,t}) \text{ のとき } \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial \sigma_u^2} < 0$$

$$q_{2,t} - q_{3,t} < \lambda_G^2 k^4 (q_{1,t} - q_{2,t}) \text{ のとき } \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial \sigma_u^2} > 0$$

(Q.E.D)

[命題6] -①

仮定より $k \geq 0$ だから、以下では k^2 で考える。本論の(14), (16)式を k^2 で偏微分し $\lambda_G m \rightarrow 1$, $k^2 = 1$ で評価すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial k^2} \Big|_{k^2=1} &\rightarrow \frac{1}{(1 + \lambda_G + \lambda_G^2)^2 d_t} \left[-\frac{1}{\sigma_u^2} [(q_{2,t} - q_{3,t}) + \lambda_G \{ \lambda_G (q_{1,t} - q_{2,t}) + 2 (q_{1,t} - q_{3,t}) \}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_G^2 (2 + \lambda_G)}{g_t} \left\{ \alpha_{3,t-1} d_{t-1} + \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right\} \right] \quad (\text{S 6-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial k^2} \Big|_{k^2=1} &\rightarrow \frac{1}{(1 + \lambda_G + \lambda_G^2)^2 d_t} \left[\frac{1}{\lambda_G^2 \sigma_u^2} \{ (1 + 2 \lambda_G + 3 \lambda_G^2) (q_{2,t} - q_{3,t}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_G^2 (1 + 2 \lambda_G) (q_{1,t} - q_{3,t}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{g_t} \left\{ \lambda_G (-1 + 3 \lambda_G + \lambda_G^2) \alpha_{3,t-1} d_{t-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + \lambda_G^2 + \lambda_G^3) \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right\} \right] \quad (\text{S 6-2}) \end{aligned}$$

(S 6-2) 式において、 $-1 + 3 \lambda_G + \lambda_G^2 > 0$ となる条件は $\lambda_G > \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \approx 0.303$ だが、 $\lambda_G m \rightarrow 1$ の条件の下では $-1 + 3 \lambda_G + \lambda_G^2 > 0$ を仮定できよう。したがって、国債の価格差に対して $\alpha_{3,t-1} d_{t-1}$ および $\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}}$ が十分に大きいとき、(S 6-1), (S 6-2) 式より

$$\frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial k^2} \Big|_{k^2=1} > 0, \quad \frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial k^2} \Big|_{k^2=1} < 0$$

となる。

(Q.E.D)

[命題6] -②

本論の(15)式を①と同様に k^2 で偏微分し $\lambda_G m \rightarrow 1$, $k^2 = 1$ で評価すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial k^2} \Big|_{k^2=1} &\rightarrow \frac{1}{(1 + \lambda_G + \lambda_G^2)^2 d_t} \left[-\frac{1}{\lambda_G^2 \sigma_u^2} \{ (1 + 2 \lambda_G + 3 \lambda_G^2) (q_{2,t} - q_{3,t}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_G^2 (1 - \lambda_G^2) (q_{1,t} - q_{2,t}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \lambda_G}{g_t} \left\{ -\lambda_G \alpha_{3,t-1} d_{t-1} + (1 + \lambda_G) \left(\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda_G + \lambda_G^2)^2 d_t} \left[-\frac{1}{\lambda_G^2 \sigma_u^2} \{ (1 + 2 \lambda_G + 3 \lambda_G^2) (q_{2,t} - q_{3,t}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_G^2 (1 - \lambda_G^2) (q_{1,t} - q_{2,t}) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1 - \lambda_G^2}{g_t} \alpha_{3,t-1} d_{t-1} \left\{ -\frac{\lambda_G}{1 + \lambda_G} + \left(\frac{\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}}}{\alpha_{3,t-1} d_{t-1}} \right) \right\}$$

よって、国債の価格差に対して $\frac{\alpha_{2,t-1} d_{t-1} + \alpha_{3,t-2} \frac{d_{t-2}}{g_{t-1}}}{\alpha_{3,t-1} d_{t-1}}$ ($=$ [命題 S 4] で定義した A) が十分に大

きいとき

$$\frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial k^2} \Big|_{k^2=1} > 0$$

が成立する。

(Q.E.D)

[命題 S 7]

以下では $\text{Cov}_t \left[q_{3,t+1}, \frac{1}{g_{t+1}} \right]$ を CV と表記する。本論の(14)–(16)式を CV で偏微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial CV} = \frac{1}{2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4)} m (1 - \lambda_G m) \{ 1 + (m + k^2) \lambda_G \} \quad (\text{S 7-1})$$

$$\frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial CV} = \frac{1}{2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4)} m (1 - \lambda_G m) (m - \lambda_G k^4) \quad (\text{S 7-2})$$

$$\frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial CV} = -\frac{1}{2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4)} m (1 - \lambda_G m) \{ m + (1 + \lambda_G m) k^2 \} \quad (\text{S 7-3})$$

(S 7-1), (S 7-3) 式より $\lambda_G m < 1$ のとき

$$\frac{\partial \alpha_{1,t}^*}{\partial CV} > 0, \quad \frac{\partial \alpha_{3,t}^*}{\partial CV} < 0$$

は明らか。

一方、 $\lambda_G m < 1$ のとき

$$\frac{1}{m} > \lambda_G > 0$$

だから

$$\begin{aligned} m - \lambda_G k^4 &> m - \frac{1}{m} k^4 \\ &= \frac{1}{m} (m^2 - k^4) \\ &= \frac{1}{m} (m - k^2)(m + k^2) \end{aligned}$$

ここで、 $k^2 < m$, すなわち $\lambda_G k^2 < \lambda_G m$ のとき

$$m - \lambda_G k^4 > 0$$

よって, (S7-2) 式より $\lambda_G k^2 < \lambda_G m < 1$ のとき

$$\frac{\partial \alpha_{2,t}^*}{\partial CV} > 0$$

(Q.E.D.)

2. 最適需要に関する命題

[命題D1] -①

本論の(26)-(28)式を各々 $r_{t+1}^{(1)}$, $E[HR_{t+1}^{(2,1)}]$, $E[HR_{t+1}^{(3,1)}]$ で偏微分すると次のようになる。

$$\beta_{1,t}^* : \frac{\partial \beta_{1,t}^*}{\partial r_{t+1}^{(1)}} = \frac{1}{\lambda_I d_t} \left(\frac{1}{\text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}]} + \frac{1}{\text{Var}[HR_{t+1}^{(3,1)}]} \right) > 0$$

$$\frac{\partial \beta_{1,t}^*}{\partial E[HR_{t+1}^{(2,1)}]} = -\frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{1}{\text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}]} < 0$$

$$\frac{\partial \beta_{1,t}^*}{\partial E[HR_{t+1}^{(3,1)}]} = -\frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{1}{\text{Var}[HR_{t+1}^{(3,1)}]} < 0$$

$$\beta_{2,t}^* : \frac{\partial \beta_{2,t}^*}{\partial r_{t+1}^{(1)}} = -\frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{1}{\text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}]} < 0$$

$$\frac{\partial \beta_{2,t}^*}{\partial E[HR_{t+1}^{(2,1)}]} = \frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{1}{\text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}]} > 0$$

$$\frac{\partial \beta_{2,t}^*}{\partial E[HR_{t+1}^{(3,1)}]} = 0$$

$$\beta_{3,t}^* : \frac{\partial \beta_{3,t}^*}{\partial r_{t+1}^{(1)}} = -\frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{1}{\text{Var}[HR_{t+1}^{(3,1)}]} < 0$$

$$\frac{\partial \beta_{3,t}^*}{\partial E[HR_{t+1}^{(2,1)}]} = 0$$

$$\frac{\partial \beta_{3,t}^*}{\partial E[HR_{t+1}^{(3,1)}]} = \frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{1}{\text{Var}[HR_{t+1}^{(3,1)}]} > 0$$

(Q.E.D.)

[命題D1] -②

$\beta_{2,t}^* > 0$, $\beta_{3,t}^* > 0$ の条件の下で, 本論の(26)-(28)式を各々 $\text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}]$, $\text{Var}[HR_{t+1}^{(3,1)}]$ で偏微分すると次のようになる。

$$\beta_{1,t}^* : \frac{\partial \beta_{1,t}^*}{\partial \text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}]} = \frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{E[HR_{t+1}^{(2,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{(\text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}])^2} > 0$$

$$\frac{\partial \beta_{1,t}^*}{\partial \text{Var}[HR_{t+1}^{(3,1)}]} = \frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{E[HR_{t+1}^{(3,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{(\text{Var}[HR_{t+1}^{(3,1)}])^2} > 0$$

$$\beta_{2,t}^* : \frac{\partial \beta_{2,t}^*}{\partial \text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}]} = -\frac{1}{\lambda_I d_t} \frac{E[HR_{t+1}^{(2,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{(\text{Var}[HR_{t+1}^{(2,1)}])^2} < 0$$

$$\frac{\partial \beta_{2,t}^*}{\partial \text{Var}[HR_{t+1}^{(3,1)}]} = 0$$

$$\beta_{3,t}^* : \frac{\partial \beta_{3,t}^*}{\partial \text{Var}[Hr_{t+1}^{(2,1)}]} = 0$$

$$\frac{\partial \beta_{3,t}^*}{\partial \text{Var}[Hr_{t+1}^{(3,1)}]} = -\frac{1}{\lambda_1 d_t} \frac{E[Hr_{t+1}^{(3,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{(\text{Var}[Hr_{t+1}^{(3,1)}])^2} < 0$$

(Q.E.D)

[命題D 2]

$\beta_{2,t}^* > 0$, $\beta_{3,t}^* > 0$ の条件の下で、本論の26-28式を d_t で偏微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial \beta_{1,t}^*}{\partial d_t} = \frac{1}{\lambda_1 d_t^2} \left(\frac{E[Hr_{t+1}^{(2,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{\text{Var}[Hr_{t+1}^{(2,1)}]} + \frac{\text{Var}[Hr_{t+1}^{(3,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{\text{Var}[Hr_{t+1}^{(3,1)}]} \right) > 0$$

$$\frac{\partial \beta_{2,t}^*}{\partial d_t} = -\frac{1}{\lambda_1 d_t^2} \frac{E[Hr_{t+1}^{(2,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{\text{Var}[Hr_{t+1}^{(2,1)}]} < 0$$

$$\frac{\partial \beta_{3,t}^*}{\partial d_t} = -\frac{1}{\lambda_1 d_t^2} \frac{E[Hr_{t+1}^{(3,1)}] - r_{t+1}^{(1)}}{\text{Var}[Hr_{t+1}^{(3,1)}]} < 0$$

(Q.E.D)

注

- 1) 国債管理政策の定義と目的については須藤 [2003, 2004] を参照されたい。
- 2) Missale [1999] と Leong [1999] は国債管理政策についての先行研究を包括的にサーベイしている。また、邦語による簡潔なサーベイとしては須藤 [2003]、西岡 [2004] を参照されたい。
- 3) 税率を平準化するための国債発行政策を考察する場合、満期構成の視点以外に、名目債、物価インデックス債、外債建債といった各種の国債をどのように組み合わせるべきかというアプローチもある。このアプローチに関する先行研究は Missale [1999] が詳細にサーベイしている。
- 4) Missale [1999] の第6章 (コスト最小化) は政府のインフレ政策に対する市場の信認と国債の償還コストとの関係から最適満期構成を考察している。そこで提示されたモデルは、OECD 加盟国の中で政府債務残高の高い国ほど、政府の反インフレ政策を維持して高金利を回避するために満期構成を短期化しているという事実を説明しているが、このモデルも税率平準化を国債管理政策の目的として導出されている。
- 5) イールド・カーブは順イールドを仮定する。
- 6) 政府支出と国債償還が税収のみで賄われるとき、予算制約は $G_t + \sum_{i=1}^3 a_{t-i} D_{t-i} < \tau_t Y_t$ となる。ここで、財政余剰を用いて国債の買戻消却を行わずに、来期以降の国債償還 (または来期以降の国債発行の減額) のために貯蓄しておくとして仮定すれば、その実質貯蓄額を S_t として $G_t + \sum_{i=1}^3 a_{t-i} D_{t-i} + S_t = \tau_t Y_t$ と表せる。この貯蓄 S_t は将来の国債発行量 D_{t+j} ($j \geq 1$) に対して影響を与えるが、国債発行の最適満期構成に対しては影響しない。貯蓄 S_t 分だけ減らすことができた国債発行量 D_{t+j} を所として、政府は最適満期構成を考えればよいからである。したがって、以下では予算制約式(1)に基づいて議論を進める。
- 7) 仮定(9)–(13)の下では、

$$\frac{\partial^2 L_t}{\partial \alpha_{1,t}^2} = \lambda_G \sigma_u^2 (1 + \lambda_G^2 k^4) d_t^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 L_t}{\partial \alpha_{2,t}^2} = \lambda_G^2 k^2 \sigma_u^2 (1 + \lambda_G k^2) d_t^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 L_t}{\partial \alpha_{1,t} \partial \alpha_{2,t}} = \frac{\partial^2 L_t}{\partial \alpha_{2,t} \partial \alpha_{1,t}} = \lambda_G^2 k^4 \sigma_u^2 d_t^2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L_t}{\partial \alpha_{1,t}^2} & \frac{\partial^2 L_t}{\partial \alpha_{1,t} \partial \alpha_{2,t}} \\ \frac{\partial^2 L_t}{\partial \alpha_{2,t} \partial \alpha_{1,t}} & \frac{\partial^2 L_t}{\partial \alpha_{2,t}^2} \end{vmatrix} = \lambda_G^2 k^2 \sigma_u^4 (1 + \lambda_G k^2 + \lambda_G^2 k^4) d_t^4 > 0$$

が成立するから、 L_t が $\alpha_{1,t}^*$ と $\alpha_{2,t}^*$ に対して最小となるための2階の条件は満たされる。

- 8) これは、政府の損失関数(4)において $\text{Var}[\tau_{t+j}] = 0$ となるため解が求められないことを意味する。
- 9) 仮定(11)より $\text{Cov}[q_{t,i+1}, g_{t+1}^*]$ はすべての国債 ($i = 1, 2, 3$) について等しいと仮定していることに注意されたい。

10) これは非ケインズ効果の一部である。非ケインズ効果については富田 [1999], 中里 [2002], 須藤 [2004] を参照されたい。

11) ②, ③式より,

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial \beta_{1,t}^2} = -\lambda_d d_t^2 \frac{\text{Var}[q_{3,t,t+1}]}{q_{3,t}^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U_t}{\partial \beta_{2,t}^2} = -\lambda_d d_t^2 \left(\frac{\text{Var}[q_{2,t,t+1}]}{q_{2,t}^2} + \frac{\text{Var}[q_{3,t,t+1}]}{q_{3,t}^2} \right) < 0$$

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial \beta_{1,t} \partial \beta_{2,t}} = \frac{\partial^2 U_t}{\partial \beta_{2,t} \partial \beta_{1,t}} = -\lambda_d d_t^2 \frac{\text{Var}[q_{3,t,t+1}]}{q_{3,t}^2} < 0$$

$$\frac{\frac{\partial^2 U_t}{\partial \beta_{1,t}^2}}{\frac{\partial^2 U_t}{\partial \beta_{2,t} \partial \beta_{1,t}}} \frac{\frac{\partial^2 U_t}{\partial \beta_{1,t} \partial \beta_{2,t}}}{\frac{\partial^2 U_t}{\partial \beta_{2,t}^2}} = \lambda_d d_t^2 \left(\frac{\text{Var}[q_{2,t,t+1}]}{q_{2,t}^2} \right) \left(\frac{\text{Var}[q_{3,t,t+1}]}{q_{3,t}^2} \right) > 0$$

が成立するから、 U_t が $\beta_{1,t}^*$ と $\beta_{2,t}^*$ に対して最大となるための2階の条件は満たされる。

- 12) ここでは短期債を発行する場合のみ考えているため、仮定⑫により $\text{Cov}_t[q_{3,t+1}, g_{t+1}^*]$ を $\text{Cov}_t[q_{1,t+1}, g_{t+1}^*]$ に置き換えた。また、⑧式右辺の第1項と第3項には分母に $k^2 (= 0)$ があるが、そもそも均衡経路では $w_{2,t}^* = 0$ だから⑧式の両辺に k^2 をかけて⑦式を導出している。
- 13) この状態は、[命題 S 2] で $\lambda_G m \rightarrow 1$ の条件について述べたように、経済が定常状態にあることを示している。
- 14) 厳密に言えば、政府は⑭-⑯式の各右辺に基づいて最適供給を決定するが、 $t-1$ 期まで満期構成の需給が均衡していること仮定していることから、⑭-⑯式各右辺は⑳-㉑式の各右辺に等しくなる。
- 15) 仮に [] 内が正で $\Delta L_t > 0$ となった場合には、損失を最小にするため政府は国債供給の満期構成を需要に合わせればよい。
- 16) この結論は「OECD 諸国において政府債務残高の対名目 GDP 比と満期構成のデュレーションとが反比例する」(Missaile [1999, pp. 185-192]) という事実と整合する。短期債の発行は政府が財政再建を引き延ばさないという信託を投資家に与えることから、中期債の価格に係るリスク・プレミアムも抑制されよう。
- 17) 第2節の最後に言及したように、本稿のモデルでも残存期間1期、2期の国債残高は最適発行比率に影響を与えることが示唆されている。

参考文献

- 黒田晁生 [1982], 『日本の金利構造』東洋経済新報社。
- 公的債務管理政策に関する研究会 [2003], 『報告書 (平成15年11月25日)』。(http://www.mof.go.jp/singikai/saimukanri/top.htm)
- 須藤藤仁 [2003], 『イギリス国債市場と国債管理』日本経済評論社。
- [2004], 「国債管理政策の意義」, 『証券レビュー』第44巻第7号, 日本証券経済研究所, 66-83頁。
- 富田俊基 [1999], 『国債累増のつけを誰が払うのか』東洋経済新報社。
- 中里 透 [2002], 「財政政策の非ケインズ効果をめぐる論点整理」, 『経済分析』第163号, 内閣府経済社会総合研究所, 71-90頁。
- 西岡慎一 [2004], 「ポートフォリオ理論に基づいた最適な国債満期構成について」, 『日本銀行ワーキングペーパーシリーズ』No. 04-J-1。(http://www.boj.or.jp/ronbun/04/data/wp04j01.pdf)
- Barro, R. J. [1979], "On the Determination of Public Debt," *Journal of Political Economy*, Vol. 87, pp. 940-971.
- [1995], "Optimal Debt Management," *NBER Working Paper*, No. 5327.
- Bohn, H. [1990], "Tax Smoothing with Financial Instruments," *American Economic Review*, Vol. 80, pp. 1217-1230.
- Calvo, G. A. and P. E. Guidotti [1990], "Indexation and Maturity of Government Bonds: An Exploratory

- Model,” in R. Dornbusch and M. Draghi (eds.), *Public Debt Management: Theory and History*, pp. 52-93. Cambridge: Cambridge University Press.
- Coe, P., M. H. Pesaran and S. P. Vahey [2000], “The Cost Efficiency of UK Debt Management: A Recursive Modelling Approach,” *Cambridge Working Papers in Economics*, No. 0005. (<http://www.econ.cam.ac.uk/faculty/pesaran/debt18ap.pdf>)
- [2003], “Scope for Cost Minimization in Public Debt Management: the Case of the UK,” *Cambridge Working Papers in Economics*, No. 0338. (<http://www.econ.cam.ac.uk/dae/repec/cam/pdf/cw-pe0338.pdf>)
- Fischer, S. [1983], “Welfare Aspects of Government Issue of Indexed Bonds,” in R. Dornbusch and M. H. Simonsen (eds.), *Inflation Debt and Indexation*, pp. 223-246. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Gale, D. [1990], “The Efficient Design of Public Debt,” in R. Dornbusch and M. Draghi (eds.), *Public Debt Management: Theory and History*, pp. 94-124. Cambridge: Cambridge University Press.
- General Accounting Office (GAO) [2001], *Debt Management Insights and Tools from Selected Nations*. (<http://www.gao.gov/new.items/d0214.pdf>)
- International Monetary Fund (IMF) and World Bank [2003], *Guidelines for Public Debt Management*. (<http://www.imf.org/external/np/mae/pdebt/2000/eng/guide.pdf>)
- Leong, D. [1999], “Debt Management – Theory and Practice,” *Treasury Occasional Paper*, No. 10.
- Lucas, R. E. and N. L. Stokey [1983], “Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 12, pp. 55-94.
- Missale, A. [1999], *Public Debt Management*, Oxford: Oxford University Press.
- Pagano, M. [1988], “The Management of Public Debt and Financial Markets,” in F. Giavazzi and L. Spaventa (eds.), *High Public Debt: The Italian Experience*, pp. 135-176. Cambridge: Cambridge University Press.
- Peled, D. [1984], “Stationary Pareto Optimality of Stochastic Asset Equilibria with Overlapping Generations,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 34, pp. 396-403.
- [1985], “Stochastic Inflation and Government Provision of Indexed Bonds,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, pp. 291-308.
- Stiglitz, J. E. [1983], “On the Relevance or Irrelevance of Public Financial Policy: Indexation, Price Rigidities, and Optimal Monetary Policies,” in R. Dornbusch and M. H. Simonsen (eds.), *Inflation Debt and Indexation*, pp. 183-220. Cambridge, Mass.: MIT Press.

(当研究所主任研究員)