

ターム・プレミアム・パズルについて

——理論モデルによる一考察——

須 藤 時 仁

要 旨

本稿では、家計が国債を需要する意義を明示的に考慮したモデルを分析することによって、ターム・プレミアム・パズルを理論的に解明することを試みた。具体的には、代表的家計の効用関数に短期債の保有量を組み込む形で拡張した消費資産価格モデルに基づいてリスク・プレミアムを導出し、その長期均衡および短期経路を分析した。モデルでは、短期債を保有することが家計の効用へ直接に影響を及ぼすことを前提としている。家計による貨幣の保有目的が短期的および長期的な流動性を確保することであり、さらに、短期的流動性を目的とした貨幣（具体的には要求払い預金、満期の短い定期性預金など）を金融機関が流動性の高い安全資産である短期債に変換していると考えれば、短期債を貨幣の代替とみなして効用関数に組み込むことは正当化されよう。

モデル分析から得られた理論的結論は、短期債の保有量が家計の効用に影響を与える（金融機関を通じた影響であろうとも）場合には、ターム・プレミアム・パズルが解決される可能性が高いということである。つまり、長期均衡では、リスク・プレミアムが正となるためには短期債に係る限界効用が正となることが必要十分条件であり、さらに実質消費に係る限界効用に対して短期債に係る限界効用が大きくなるほどプレミアムは上昇する。一方、短期経路においては、短期債に係る限界効用が正となることはリスク・プレミアムが正となるための必要条件ではあるが十分条件ではない。ただし、 $u(c_t, Q_{t+1}) = Q_{t+1}^{\alpha} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ という特殊な形の効用関数と、そこで家計の相対的危険回避度 γ が0.5超であるという通説的な実証結果を前提にすると、 γ に対して効用に係る短期債の弾力性 α が大きくなるほど、実質消費と短期債保有量の系列を所与としたときのリスク・プレミアムが正となる可能性も高くなる。この結果は、 γ を一定としたとき、実質消費に係る限界効用に対する短期債に係る限界効用の上昇を含意することから、長期均衡における分析結果と整合的である。

目次

- I. はじめに
- II. 債券保有量を効用に考慮した消費資産価格モデル
 - 1. 仮定
 - 2. 基本モデルとリスク・プレミアムの導出

- III. 分析
 - 1. 長期均衡でのリスク・プレミアム
 - 2. 短期経路でのリスク・プレミアム
- IV. 結論

I. はじめに

消費資産価格モデルは理論としての包括性から資産価格理論の規範的モデルの1つとなっているが、実証分析では必ずしも支持されず、いくつかの「パズル」を提示してきた。その中で最も有名なものは Mehra and Prescott [1985] が示した「エクイティ・プレミアム・パズル」であろう。Mehra and Prescott はカリブレーション法（実証分析で計測されたパラメータをモデルに与え、モデルの計測値と実現値との乖離の度合いを調べる方法）を用いてアメリカの株式収益率と安全資産（短期債券）の収益率の差であるリスク・プレミアム（エクイティ・プレミアム）の大きさを計測した結果、現実的な消費者の相対的危険回避度を前提とした場合に、リスク・プレミアムの実現値が理論値を大きく上回ることを見出し、このことをエクイティ・プレミアム・パズルと呼んだ¹⁾。

本来、消費資産価格モデルは株式、債券を同時に考慮した上で金融資産の収益率の動きを分析するモデルだが、近年では金利の期間構造分析にも応用されるようになってきている。この消費資産価格モデルを適用した期間構造の実証分析においても、ターム・プレミアムの符号が理論と現実とで異なるという「ターム・プレミアム・パズル」が起きている。このパズルはそ

もそも Backus, Gregory and Zin [1989] と Salyer [1990] によって実証された。両研究は、2 期間のキャッシュ・イン・アドバンス経済のフレーム・ワークの中で、i) 経済の状態（好況、不況いずれかの状態）がマルコフ過程に従って推移する、ii) 消費者の効用関数は $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$ で表され、かつ限界効用の1階差が定常過程に従うという仮定をおきターム・プレミアムを導出したところ、実質消費成長率が正の1次自己相関を持つとき、それは理論的にマイナスとなるはずにもかかわらず、アメリカの3ヵ月と6ヵ月物TBレートのターム・プレミアムはプラスの符号を示していることを指摘したのである²⁾。また、イギリスの実質スポット・レートを用いて消費資産価格モデルがイールド・カーブ全体に妥当するかを検証した須藤 [2000] の研究でも、パラメータは正で有意に推定されたが、やはり1年以下のショート・エンドでターム・プレミアム・パズルが生じている。

エクイティ・プレミアム・パズルもターム・プレミアム・パズルも消費資産価格モデルの実証分析から派生した問題であるにもかかわらず、理論的、実証的研究の蓄積では後者の方が明らかに劣っているのが現状である。しかしながら、消費資産価格モデルの妥当性という観点からは後者の方が前者よりもはるかに深刻な問題を提示している。というのも、エクイティ・プレミアム・パズルではリスク・プレミアムの

理論値と現実値がかい離しているものの、その符号がプラスで一致している反面、ターム・プレミアム・パズルではプレミアムの符号自体が理論と現実とで反対になってしまっているからである。そこで、本稿では、従来用いられてきた消費資産価格モデルを発展させることによって、ターム・プレミアム・パズルを理論的に説明することを目的とする。

ターム・プレミアム・パズルを固有に扱った先行研究を見ると、これを説明するモデルは概ね次の3つに分類される。

① 習慣形成

現在の消費水準が過去の消費水準にも依存するという仮説を組み込むことで、実質消費の成長率が負の自己相関を持つことを説明するモデル。(Gregory and Voss [1991]³⁾, Salyer [1995])

② 嗜好変化 (ショック)

消費者の効用が消費水準だけでなく他の要素によっても影響を受ける (たとえば, $u(c_t, \lambda_t) = \lambda_t \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$) と仮定することによって、異時点間の限界代替率が負の自己相関を持つことを説明するモデル。(Campbell [1986])

③ 不完全市場と将来の不確実性

パズルの原因を資本市場の不完全性や将来の不確実性に求めるモデル。(Heaton and Lucas [1992], Bansal and Coleman [1996], Holmström and Tirole [1998]) 前二者のモデルが代表的消費者の効用はどのようにして決定されるのかという問題に焦点を当てているのに対して、最後のモデルは動学的一般均衡モデルの中に取引コストや将来所得の不確実性の要素を組み込むことによってパズルの説明を試みていることが特徴である。

これらの仮説はターム・プレミアム・パズルに対して理論的な説明力を有し、かつ Salyer, Heaton and Lucas, Bansal and Coleman はカリブレーション法により仮説を実証している。では、効用関数の形状と不完全市場や将来の不確実性、どちらがこのパズルの真の原因なのだろうか。逆に言えば、これらの要因を統一的に説明できないだろうか。これが本稿の問題意識であり、1つの解答として、「家計は取引サービスの享受と将来の不確実性のために貨幣を含む金融資産を保有し、そのうち、取引サービスを与える貨幣や短期金融資産は効用に影響を与える」と仮定することが考えられる。実際、LeRoy [1984], Bakshi and Chen [1996] は、実質貨幣残高を効用関数に組み込んだモデルに基づいて金利の期間構造を分析しているが、その主たる問題意識は金融政策の名目金利への影響であり、ターム・プレミアム・パズルについては何も言及していない。また、現実には、家計は少額の現金通貨を手元に残す以外、多くの貨幣を金融機関に預け、金融機関が家計に代って金融資産に投資している。このように、金融機関を通じて貨幣が金融資産に変換されることを考えたとき、貨幣に代って取引サービスを提供する金融資産として、流動性が高く安全な短期国債を効用関数に組み込むほうが現実的であろう。

本稿は、以上の問題意識に基づき、家計が金融資産 (国債) を購入する意義を考慮したモデルを提示することによって、ターム・プレミアム・パズルを理論的に分析する。構成は以下のとおりである。まず第Ⅱ節では、モデルの仮定を説明した後、代表的家計の効用関数に短期債の保有量を組み込む形で拡張した資産価格モデルを提示し、それに基づいてリスク・プレミア

ムの決定式を示す。第Ⅲ節では、モデルを用いて長期均衡および短期経路におけるリスク・プレミアムを分析する。ここで結論を先に述べれば、長期、短期において、たとえ実質消費成長率が正の自己相関を持つ場合でもリスク・プレミアムは正となる可能性がある、つまりターム・プレミアム・パズルが解決されることが示される。第Ⅳ節では、モデル分析から得られたインプリケーションを述べると共に今後の課題について言及する。

Ⅱ. 債券保有量を効用に考慮した消費資産価格モデル

1. 仮定

ここでは、代表的家計の効用関数に短期債の保有量を組み込む形で拡張した消費資産価格モデルに基づいて、家計の最適消費行動と整合的な金利の期間構造モデルを導出する。そのために債券と家計行動について次のような仮定をおく。

[債券]

- ・残存期間1期の短期国債（以下、短期債）と残存期間 n 期（ $n \geq 2$ ）の長期国債（以下、長期債）を考え、いずれもゼロ・クーポン債とする。
- ・消費者物価で測った実質発行（購入）価格は両国債とも1とする。

[家計]

- ・家計の効用は実質消費量と短期債保有量によって決定され、かつ時間に関して加法分離的である。
- ・1家計において、ある世代の消費者は次世代の消費者（子供）の養育も考慮して消費選択

を行う。このため、各世代の消費者の寿命は有限でも、家計自体は永久（将来について無限）に存続する。

ここで、モデルの導出に進む前に、上述した家計行動の前提について説明しておこう。家計行動は、家計による国債の直接保有、短期債保有の効用への直接的影響を前提としている。まず、家計が国債を直接保有している点だが、現実には国債の主要な保有主体は機関投資家をはじめとする金融機関である。しかしながら、金融機関が国債に投資する原資は主に家計からの預金や保険料である。したがって、金融機関は家計に代って国債を購入していると考えれば、モデルにおいて家計が国債を直接保有していると仮定することができる。さらに、モデルの背景として、家計－（預金、保険料支払）→[金融機関]－（国債購入）→市場[政府]という流れを想定することは、2番目の前提条件である短期債保有が効用に直接影響することに対して1つの根拠を与える。この点を次に説明しよう。

これまで、効用関数に組み込むことのできる金融資産として、フィアット・マネーとしての実質貨幣残高だけが考えられてきた。これは、フィアット・マネーの保有が取引サービスという形で家計の厚生に貢献するとともに、フィアット・マネーの発行収入を家計にラン・サムで還元することで分配上の効果を取り除くことができるためである。しかしながら、家計による貨幣の保有目的が短期的および長期的な流動性を確保することであり、さらに、短期的流動性を目的とした貨幣（具体的には要求払い預金、満期の短い定期性預金など）を上述した経路で金融機関が流動性の高い安全資産である短期債に変換していると考えれば、短期債を貨幣の代替とみなして効用関数に組み込むことは正

当化されよう⁴⁾。

2. 基本モデルとリスク・プレミアムの導出

代表的家計は、 $(t-1)$ 期および $(t-n)$ 期に購入した国債の償還金と税引き後の非資産所得の合計を毎期の総収入とし、それを基に現在 $(t=0)$ 期から将来にかけての消費と短期債保有から得られる期待効用の割引現在価値が最大となるように消費財と2種類の国債の最適な選択を行う。すると、この最適化問題は次のように定式化される。

$$\max_{\{c_t, Q_{kt}, Q_{nt}\}_0} E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, Q_{kt}) \right] \quad (1)$$

$$\text{s.t. } c_t + Q_{kt} + Q_{nt} \leq y_t + (1 + r_{1t-1})Q_{1t-1} + (1 + r_{nt-n})^n Q_{nt-n} \quad \forall t \quad (2)$$

ただし

$E_t[\cdot]$: t 期において利用可能な情報に基づく
条件付期待値演算子

β : 主観的割引率 $(0 < \beta < 1)$

$u(\cdot)$: 効用関数 $\left(\frac{\partial u}{\partial c_t} > 0, \frac{\partial u}{\partial Q_{kt}} > 0 \right)$ を仮定)

c_t : t 期における実質消費

Q_{kt} : t 期末における k 期債の保有量 $(k=1, n)$

r_{kt} : t 期における k 期債の実質スポット・レート $(k=1, n)$

y_t : t 期における税引き後の非資産所得

なお、制約条件(2)において、家計は長期債の途中売却を行わないことが前提となっている。これは、前述したように金融機関が家計から資金を集めて国債に投資していると考えれば、家計が長期の定期預金や保険を同時期に一斉に解約しない限り金融機関は長期債を満期まで保有するだけの長期性資金を安定的に維持していると

解釈することから導かれる。

上記(1), (2)式で表される動学的最適化問題を解くと、1階の条件から、家計の最適消費行動と整合的な金利の期間構造モデル(基本モデル)として

$$E_t \left[\beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right] = (1 + r_{1t})^{-1} \left[1 - \frac{\mu_t}{\lambda_t} \right] \quad (3)$$

$$E_t \left[\beta \frac{\lambda_{t+n}}{\lambda_t} \right] = (1 + r_{nt})^{-n} \quad (4)$$

という2つの確率的オイラー方程式が得られる。ただし、

$$\lambda_t \equiv \frac{\partial u}{\partial c_t}, \quad \mu_t \equiv \frac{\partial u}{\partial Q_{kt}}$$

である。また、効用関数と主観的割引率における仮定により $\beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} > 0$ だから、(3)式が成立するためには

$$0 \leq \mu_t < \lambda_t \quad (5)$$

が条件となる。

導出された(3), (4)式は、消費を犠牲にして国債を購入した場合に相対的に失われる今期の消費に係る限界効用が、国債保有によって得られる将来の消費に係る限界効用の割引限界価値に等しくなるように、消費経路が決められることを示しており、この関係は、均衡においては消費および国債の供給経路を所与とした場合、国債の均衡収益率の決定式とみなされる。なお、(3)式より、短期債保有を効用関数に組み込んだ場合には、組み込まない場合より λ_{t+1} が小さくなり、したがって来期における消費は多くなる。これは、 t 期に購入した短期債が $(t+1)$ 期に償還されることに伴う効用減少を補うだけ消費を多くしなければならないためである。

次に、基本モデル(3), (4)式から $n=2$ と仮定したときのリスク・プレミアムを表す式を導出

しよう。リスク・プレミアム S だが、ここでは Woodward [1983] と Lee [1989] に従い、 t 期における 1 期債の $(t+1)$ 期予想価格と、1 期債と 2 期債の価格から計算される $(t+1)$ 期のフォワード価格の差と定義する⁵⁾。

$$S \equiv E_t \left[\frac{1}{1+r_{t+1}} \right] - \frac{1}{1+f_{t+1}} \quad (6)$$

ここで f_{t+1} は $(t+1)$ 期におけるフォワード・レートであり、その定義から

$$\frac{1}{1+f_{t+1}} = \frac{1+r_{1t}}{(1+r_{2t})^2} \quad (7)$$

という関係が成立する。一方、 $n=2$ のとき(3)と(4)式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+r_{2t})^2} &= E_t \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right) \cdot \beta \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right] \\ &= E_t \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right) \right] E_t \left[E_{t+1} \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right] \right] \\ &\quad + \text{Cov}_t \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right), \beta \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1+r_{1t}} \left(1 - \frac{\mu_t}{\lambda_t} \right) \left\{ E_t \left[\frac{1}{1+r_{t+1}} \right] \right. \\ &\quad \left. E_t \left[1 - \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \right] + \text{Cov}_t \left[\frac{1}{1+r_{t+1}}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \right] \right\} + \text{Cov}_t \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right), \beta \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1+r_{1t}}{(1+r_{2t})^2} = \left(1 - \frac{\mu_t}{\lambda_t} \right) \left\{ E_t \left[\frac{1}{1+r_{t+1}} \right] \right.$$

$$\begin{aligned} &E_t \left[1 - \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \right] + \text{Cov}_t \left[\frac{1}{1+r_{t+1}}, \right. \\ &\left. \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \right] \left. \right\} + (1+r_{1t}) \text{Cov}_t \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right), \right. \\ &\left. \beta \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right] \end{aligned}$$

これを(7)式に代入して得られた $(1+f_{t+1})^{-1}$ を(6)式に代入して整理すると、リスク・プレミアム

Δ は

$$\begin{aligned} S &= \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\mu_t}{\lambda_t} \right) E_t \left[1 - \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \right] \right\} \\ &\quad \times E_t \left[\frac{1}{1+r_{t+1}} \right] - \left(1 - \frac{\mu_t}{\lambda_t} \right) \\ &\quad \times \text{Cov}_t \left[\frac{1}{1+r_{t+1}}, 1 - \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \right] \\ &\quad - (1+r_{1t}) \text{Cov}_t \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right), \beta \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right] \quad (8) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、効用関数に短期債保有量が考慮されないとき、つまり短期債の保有が効用に影響を与えないときリスク・プレミアムがどうなるかを確認しておこう。この場合、 $\mu = \mu_{t+1} = 0$ だから

$$S = -(1+r_{1t}) \text{Cov}_t \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right), \beta \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right]$$

となる。したがって、消費における異時点間の限界代替率が正の 1 次自己相関を持つとき、特に CRRA 型の効用関数では実質消費の成長率が正の 1 次自己相関を持つときフォワード・リスク・プレミアムは理論的にマイナスとなってしまう。さらに、 $\lambda_t = \lambda_{t+1} = \lambda_{t+2} = \lambda$ となる長期均衡状態では $S = 0$ となり、金利の期間構造における純粋期待理論と合致する。

では、短期債保有が効用に考慮されたときに S はどのような特性を示すのだろうか。まずは長期均衡における特性から調べてみよう。

Ⅲ. 分 析

1. 長期均衡でのリスク・プレミアム

分析に入る前に、長期均衡において国債残高をどう扱うか説明しておく。債券は発行主体の負債であるため、通常では

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_{1t} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{2t} = 0$$

と仮定される。しかし、発行主体として国家（政府）が永続的に存続すると考えた場合には長期均衡での政府債務をゼロと仮定する必然性はない。したがって、本稿では、長期均衡において国債の償還分を新たな国債発行と利払い分（償還価格－発行価格）の税金（増税）で賄うという、発行残高一定の状態を想定する。

長期均衡では全ての t に対して $c_t = c$, $Q_{1t} = Q_1$, $Q_{2t} = Q_2$ となるから、各変数の限界効用および 1 期債の利回りについても

$\lambda_t = \lambda_{t+1} = \lambda_{t+2} = \lambda$, $\mu_t = \mu_{t+1} = \mu$, $r_{1t} = r_{1t+1} = r$ が成立する。これらを(8)式に代入して整理すると

$$(1 + r_1)S = 1 - \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \quad (9)$$

と表せる。一方、条件(5)より $0 \leq \frac{\mu}{\lambda} < 1$ でなければならないから、(9)式より S の符号は $\mu = 0$ のとき $S = 0$
 $\mu > 0$ のとき $S > 0$
となる。

以上の分析より、短期債保有を効用に考慮した場合には、①短期債に係る限界効用が正であれば、リスク・プレミアムは長期均衡において理論的に正となる、②実質消費に係る限界効用に対して短期債に関するそれが大きくなるほどプレミアムは大きくなること示された⁶⁾。ここで、長期均衡状態にもかかわらず家計が国債を保有するインセンティブは税金（増税）対策にある。つまり、長期均衡において每期利払い分だけ税金を徴収される限り、合理的な家計はその税金支払いに備えるために国債を保有（すなわち貯蓄）するのである⁷⁾。

2. 短期経路でのリスク・プレミアム

(8)式を変形すると

$$S = E_t \left[\left(\frac{1}{1 + r_{1t+1}} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\mu_t}{\lambda_t} \right) \left[1 - \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \right] \right\} \right] - (1 + r_{1t})\sigma_{\lambda 12} \quad (10)$$

となる⁸⁾。ただし $\sigma_{\lambda 12} \equiv \text{Cov}_t \left[\beta \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right), \beta \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right]$ である。この式において、短期的には共分散 σ の符号が不明なことから、 S の符号も確定しない。これは、実質消費以外に短期債の保有量が $\left\{ \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right\}$ の系列に影響を与えるため、たとえば実質消費の成長率が正の 1 次自己相関を持っていたとしても σ が正になるとは限らないからである。そこで、分析を掘り下げるために、効用関数の型、実質消費と短期債保有量の変化率の分布を以下のように仮定する⁹⁾。

[効用関数]

$$u(c_t, Q_{1t}) = Q_{1t}^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (11)$$

ここでパラメータ α と γ は各々、効用に係る短期債保有量の弾力性、消費に関する相対的危険回避度を表し、 $\alpha > 0$, $0 < \gamma < 1$ と仮定する。

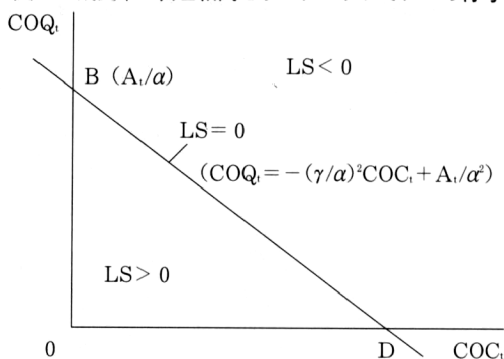
[実質消費と短期債保有量の変化率の分布]

- ・時点 t から見た将来の実質消費 c_{t+1} および短期債保有量 Q_{1t+1} の変化率は対数正規分布する。
- ・実質消費および短期債保有量の変化率の系列は定常性を満たし、かつ両系列は互いに無相関である。

実質消費と短期債保有量の変化率が対数正規分布するという仮定に合わせて、リスク・プレミアムを新たに

$$LS \equiv \ln E_t \left[\frac{(1 + r_{2t})^2}{(1 + r_{1t})(1 + r_{1t+1})} \right]$$

図1 成長率の自己相関とリスク・プレミアムの符号



と定義する¹⁰⁾。ここで、 $(1+r_{t+1})$ の時間に対する変動は極めて小さいと仮定すると

$$LS = 2\ln(1+r_{2t}) - \ln(1+r_{1t}) - E_t[\ln(1+r_{1t+1})] \quad (12)$$

と表せる¹¹⁾。先に求めた確率的オイラー方程式(3)、(4)の両辺の対数を取ることによって $\ln(1+r_{2t})$ 、 $\ln(1+r_{1t})$ 、 $E_t[\ln(1+r_{1t+1})]$ を計算し、(12)式に代入すると

$$LS = E_t \left[\ln \left\{ \left(1 - \frac{\mu_t}{\lambda_t} \right) \left(1 - \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \right) \right\}^{-1} \right] - \text{Cov}_t \left[\ln \left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right), \ln \left(\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} \right) \right] \quad (13)$$

一方、(11)式から計算した $\lambda_t \left(= \frac{\partial u}{\partial c_t} \right)$ 、 $\mu_t \left(= \frac{\partial u}{\partial Q_{1t}} \right)$ を(13)式に代入し、実質消費と短期債保有量の系列が無相関であることを考慮して整理すると、最終的にLSは

$$LS = E_t \left[\ln \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{1-\gamma} \frac{c_t}{Q_{1t}} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{1-\gamma} \frac{c_{t+1}}{Q_{1t+1}} \right) \right\}^{-1} \right] - \alpha^2 \text{Cov}_t \left[\ln \left(\frac{Q_{1t+1}}{Q_{1t}} \right), \ln \left(\frac{Q_{1t+2}}{Q_{1t+1}} \right) \right] - \gamma^2 \text{Cov}_t \left[\ln \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right), \ln \left(\frac{c_{t+2}}{c_{t+1}} \right) \right] \quad (14)$$

と表せる。ここで、 $\alpha = 0$ 、すなわち短期債保有量が効用に影響を与えないとき、

$$LS = -\gamma^2 \text{Cov}_t \left[\ln \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right), \ln \left(\frac{c_{t+2}}{c_{t+1}} \right) \right]$$

となり、実質消費成長率が正の1次自己相関を持つ場合には $LS < 0$ となることを確認しておこう。

(14)式において、右辺の第1項、第2項、第3項を各々 A_t 、 COQ_t 、 COC_t とおくと、条件(5)より $0 \leq \frac{\mu_t}{\lambda_t} = \frac{\alpha}{1-\gamma} \frac{c_t}{Q_{1t}} < 1$ ($j = t, t+1$)だから $A_t \geq 0$ となり、LSの符号は図1のように示される。この図から、実質消費成長率が1次自己相関を持つ、つまり $COC_t > 0$ でも $LS > 0$ となるためには $COQ_t < A_t/\alpha^2$ でなければならない。さらに、 A_t/α^2 が大きくなるほど実質消費と短期債保有量の所与の経路に対してリスク・プレミアムが正となる可能性が高くなることがわかる。

では、 $\{C\}$ と $\{Q_{1t}\}$ の経路が所与であるとき、パラメータ α と γ の組み合わせに対して $LS > 0$ となる可能性はどのように変化するのであろうか。 $COC_t > 0$ 、 $COQ_t > 0$ を仮定すると、図より $LS > 0$ となる可能性は ΔBOD の面積に反映される。

$$\Delta BOD \text{ の面積} = \frac{1}{2} \left(\frac{A_t}{\alpha\gamma} \right)^2$$

だから、 $LS > 0$ となる可能性は、関数

$$f(\alpha, \gamma) = \frac{A_t}{\alpha\gamma}$$

が α と γ によってどのように変化するかによる。関数 $f(\alpha, \gamma)$ を α と γ で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha^2 \gamma} \left(\alpha \frac{\partial A_t}{\partial \alpha} - A_t \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \frac{1}{\alpha \gamma^2} \left(\gamma \frac{\partial A_t}{\partial \gamma} - A_t \right) \quad (16)$$

一方、

$$A_t \equiv E_t \left[\ln \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{1-\gamma} \frac{c_t}{Q_{t+1}} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{1-\gamma} \frac{c_{t+1}}{Q_{t+1}} \right)^{-1} \right\} \right]$$

だから、 A_t を α と γ で偏微分して整理すると

$$\alpha \frac{\partial A_t}{\partial \alpha} = (1-\gamma) \frac{\partial A_t}{\partial \gamma} \quad (17)$$

という関係が示される。(17)式を(15)式に代入して得られる式を(16)式と比較すると、 γ の値に応じて次のような関係が導ける。

$$\gamma = 0.5 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$$

$$\gamma > 0.5 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} < 0$$

$$\gamma < 0.5 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} > 0$$

日米欧を対象とした実証研究では、総じて γ は0.5より大きいという推定が得られている。この場合、上記の結果より、相対的危険回避度に対する短期債保有量の弾力性、すなわち α/γ が大きくなるほど、所与の $\{C_t\}$ と $\{Q_{t+1}\}$ に対してLSが正となる可能性が高くなる。さらに、 γ が一定の場合には、 α の上昇は μ/λ_t の上昇を含意するから、この短期均衡経路における分析結果は、「 γ が0.5より大きく一定である」という条件の下で、長期均衡での分析結果と整合している。

IV. 結 論

本稿では、家計が国債を需要する意義を明示的に考慮したモデルを分析することによって、ターム・プレミアム・パズルを理論的に解明することを試みた。具体的には、代表的家計の効用関数に短期債の保有量を組み込む形で拡張し

た消費資産価格モデルに基づいてリスク・プレミアムを導出し、その長期均衡および短期経路を分析した結果、次のような結論が得られた。長期均衡では、リスク・プレミアムが正となるためには短期債に係る限界効用が正となる必要十分条件であり、さらに実質消費に係る限界効用に対して短期債に係るそれが大きくなるほどプレミアムは上昇する。一方、短期経路においては、短期債に係る限界効用が正となることはリスク・プレミアムが正となるための必要条件ではあるが十分条件ではない。ただし、家計の相対的危険回避度 γ が0.5超であるという通説的な実証結果を前提にすると、 γ に対して効用に係る短期債の弾力性 α が大きくなるほど、実質消費と短期債保有量の系列を所与としたときのリスク・プレミアムが正となる可能性も高くなる。この結果は、 γ を一定としたとき、実質消費に係る限界効用に対する短期債に係る限界効用の上昇を含意することから、長期均衡における分析結果と整合的である。

このモデル分析から得られた理論的結論は、短期債の保有量が家計の効用に影響を与える（金融機関を通じた影響であろうとも）場合には、ターム・プレミアム・パズルが解決される可能性が高いということである。この理論的結論の当否は実証分析の結果をまたなければならず、これが今後の課題である。具体的には、短期債もしくは国債の保有は家計の効用に影響を与えるのか、また、影響を与えるとしてもその限界効用は実質消費の限界効用に対してどのように推移しているのかという点が検証のポイントとなる。しかし、現実には多くの家計は金融機関を通じて国債に投資しており、さらに国債以外にも様々な金融商品が存在するためこれらの問題を直接的に検証することは極めて困難で

ある。したがって、金融資産の保有は家計の効用に影響を与えるのか、経済環境等に応じて金融機関はどのように金融商品に分散投資すべきか、国債の保有構造はどうあるべきかといった論点を個別に分析することによって間接的に実証してゆくことになる。

注

- 1) エクイティ・プレミアム・パズルに関しては多くの理論的、実証的研究が行われており、それらのサーベイとしては Kocherlakota [1996] と Campbell, Lo and MacKinlay [1997] の Chapter 8 (p. 291-337) を参照されたい。
- 2) Campbell [1986] も実質消費の成長率が正の1次自己相関を持つとき、実質金利のフォワード・リスク・プレミアムおよびローリング・リスク・プレミアムが理論的にマイナスとなることを示した。一方、Donaldson, Johnsen and Mehra [1990] は確率成長モデルに Merha and Prescott [1985] と同様のカリブレーション法を適用することによって景気循環と実質金利の期間構造との関係を分析し、好況・不況時を平均してみればイールド・カーブは正の傾きを持つが、景気の谷ではその傾きが負となる可能性を示唆した。
- 3) Gregory and Voss [1991] は消費資産価格モデルに基づいてカナダの期間構造を分析しているが、カナダの場合実質消費成長率はそもそも負の自己相関を示していたため、分析の焦点はターム・プレミアム・パズルではなく、ターム・プレミアムの変動を説明することに当てられている。
- 4) 貨幣と短期債の代替性については Friedman [1978], Wallace [1981], Bansal and Coleman [1996] 等も主張しており、そもそも、貨幣の役割を明示的に扱っていない消費資産価格モデルは、貨幣と金融資産が代替的であることを前提としている。また、LeRoy [1984] は、貨幣残高を効用関数に組み込むべきか否かについて、どちらのモデルが現実をよりよく説明しているかで判断すべきとしている。本稿の観点から言えば、少なくとも短期債を効用関数に組み込まない通時的な消費資産価格モデルではターム・プレミアム・パズルが発生しているのだから、本稿が提示するモデルがこれを説明しうるか否かが重要であろう。
- 5) Woodward [1983] と Lee [1989] は実質的なプレミアムとして $(1+f_{t+1})^{-1}-E_t[1+r_{t+1}]^{-1}$ と定義しているが、Shiller [1990] によればフォワード・リスク・プレミアムは $f_{t+1}-E_t[r_{t+1}]$ と定義されるため、本稿では逆の差をとった。
- 6) 長期債保有も効用関数に組み込んだ場合、長期均衡におけるリスク・プレミアム (S) は正にも負にもなることが示される。さらに、短期債に係る限界効用が長期債

に係るそれよりも大きくなるほど S は大きくなる。

- 7) 長期均衡において家計は利払いのための税金を正確に予測することができるのであるから、長期性の資産、すなわち長期債を保有するインセンティブはない。しかしながら、個々の消費者に関して厳密に言えば、長期均衡状態でも寿命に関する不確実性は残る。この不確実性をヘッジするために個々の消費者は(保険料支払いなどを通じて)長期債に投資するのである。

- 8) (10)式から、 $\sigma_{\lambda 12} = 0$ のとき $S = 0$ となる条件は

$$\left(1 - \frac{\mu_t}{\lambda_t}\right) \left(1 - \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}}\right) = 1$$

であり、これは長期均衡において $S = 0$ となる条件 ((9) 式) と同値である。

- 9) 本稿では政府行動を明示的に扱っていないため、国債発行のルールを定式化していない。仮に毎期の国債総発行量の一定割合を短期債で発行するとすれば、短期債残高の変化率の分布は総残高の変化率の分布と等しくなるため、ここでは短期債に関する分布のみ仮定した。
- 10) これまで用いてきたリスク・プレミアム S は

$$S = E_t \left[\frac{1}{1+r_{t+1}} \right] - \frac{1}{1+f_{t+1}} \\ = \frac{1+r_{t+1}}{(1+r_{t+1})^2} E_t \left[\frac{(1+r_{t+1})^2}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+1})} \right] - 1$$

と変形できることから、S と LS の符号は等しくなる。

- 11) 計算に当たっては、変数 X_t が対数正規分布するとき $\ln E_t[X_t] = E_t[\ln X_t] + 0.5 \text{Var}_t[\ln X_t]$ が成立するという特性を用いた。

参考文献

- 釜江廣志 [1999], 『日本の証券・金融市場の効率性』, 有斐閣
- 須藤時仁 [2000], 「イギリスにおける実質金利の期間構造」『証券経済学会年報』第35号, 証券経済学会
- 羽森茂之 [1996], 『消費者行動と日本の資産市場』, 東洋経済新報社
- Backus, D.K., A.W. Gregory, and S.E. Zin [1989], "Risk Premiums in the Term Structure: Evidence from Artificial Economies," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 24, pp. 371-399.
- Bansal, R. and W.J. II. Coleman [1996], "A Monetary Explanation of the Equity Premium, Term Premium, and Risk-Free Rate Puzzles," *Journal of Political*

- Economy*, Vol. 104, pp. 1135-1171.
- Baksih, G.S. and Z. Chen [1996], "Inflation, Asset Prices, and the Term Structure of Interest Rates in Monetary Economics," *Review of Financial Studies*, Vol. 9, pp. 241-275.
- Campbell, J.Y. [1986], "Bond and Stock Returns in a Simple Exchange Model," *Quarterly Journal of Economics* 101, pp. 783-803.
- Campbell, J.Y., A.W. Lo and A.C. MacKinlay [1997], *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Donaldson, J.B., T. Johnsen and R. Mehra [1990], "On the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 14, pp. 571-596.
- Friedman, B.M. [1978], "Crowding out or Crowding in? Economic Consequence of Financing Government Deficits," *Brookings Papers on Economic Activity*, Vol. 3, pp. 593-641.
- Gregory, A.W. and G.M. Voss [1991], "The Term Structure of Interest Rates: Departures from Time-Separable Expected Utility," *Canadian Journal of Economics*, Vol. 24, pp. 923-939.
- Heaton, J. and D.J. Lucas [1992], "The Effects of Incomplete Insurance Markets and Trading Costs in a Consumption-Based Asset Pricing Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 16, pp. 601-620.
- Holmström, B. and J. Tirole [1998], "LAPM: A Liquidity-Based Asset Pricing Model," *NBER Working Paper Series*, No. 6673.
- Kocherlakota, N.R. [1996], "The Equity Premium: It's Still a Puzzle," *Journal of Economic Literature*, Vol. 34, pp. 42-71.
- Lee, B.S. [1989] "A Nonlinear Expectations Model of the Term Structure of Interest Rates with Time-Varying Risk Premiums," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 21, pp. 348-367.
- LeRoy, S.F. [1984], "Nominal Prices and Interest Rates in General Equilibrium," *Journal of Business*, Vol. 57, pp. 177-213.
- Mehra, R. and E.C. Prescott [1985], "The Equity Premium: A Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, pp. 145-161.
- Salayer, K.D. [1990], "The Term Structure and Time Series Properties of Nominal Interest Rates: Implications from Theory," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 22, pp. 478-490.
- Salayer, K.D. [1995], "Habit Persistence and the Nominal Term Premium Puzzle: A Partial Resolution," *Economic Inquiry*, Vol. 33, pp. 672-691.
- Shiller, R.J. [1990], "The Term Structure of Interest Rates," In Friedman, B. and Hahn, F. (eds.), *Handbook of Monetary Economics*, Vol. I, Amsterdam: North Holland.
- Wallace, N. [1981], "A Modigliani-Miller Theorem for Open Market Operations," *American Economic Review*, Vol. 71, pp. 267-274.
- Woodward, S. [1983], "The Liquidity Premium and Solidity Premium," *American Economic Review*, Vol. 73, pp. 348-361.

(当所東京研究所主任研究員)