

価格モデルの精緻化はインデックス投資の リスク評価に影響するか？

— 新 NISA を想定した長期シミュレーションによる検証 —

金 谷 太 郎
吉 田 陽 一

要 旨

2024年から始まった新 NISA により、非課税投資枠が大幅に増額され、非課税期間は恒久化された。政府は家計に長期に渡って資産運用を行うインセンティブを与えており、証券業界・資産運用業界の低コスト化競争により、個人の投資環境整備は近年急速に進んでいる。その一環として、長期インデックス投資がリスクに見合うリターンが得られるか否かを可視化するシミュレーション結果を示すことは重要である。その際、頻繁に用いられるのは簡便な幾何ブラウン運動モデルである。本稿では現実データで観測されるものの幾何ブラウン運動モデルでは捉えられない極端な下落などの挙動をより正確に表現できる ARMA-EGARCH-skew-t モデルを採用して2つのモデル間で生じるシミュレーション結果の差に注目した。最も標準的な全世界株式指数、全米株式指数及び TOPIX に連動する投資信託で運用すると想定した場合、2つのモデル間には積立や取り崩しのリスク評価に明確な差が生じるものの、個人投資家の現実的な意思決定において影響を与える程ではないことを示す。

キーワード：新 NISA, モンテカルロ・シミュレーション, テイルリスク, 時変ボラティリティ, 非対称 t 分布

目 次

- | | |
|----------------------------|------------------|
| 1. はじめに | 4.2 幾何ブラウン運動モデル |
| 2. 先行研究と本稿の位置づけ | 5. 推定 |
| 3. データ | 6. シミュレーション |
| 3.1 基本統計量 | 6.1 各時系列の発生 |
| 3.2 単一期間のバックテスト | 6.2 積立シミュレーション |
| 3.3 ローリング法によるバックテスト | 6.3 取り崩しシミュレーション |
| 4. モデル | 7. おわりに |
| 4.1 ARMA-EGARCH-skew-t モデル | |

1. はじめに

NISA (Nippon Individual Savings Account: 日本版少額投資非課税制度) は 2024 年に大幅に拡充され、非課税投資枠の増額と非課税期間が恒久化された。これにより、家計が長期のインデックス投資を前提に資産形成と取り崩しを設計する機運が高まっている。その計画を立てるにあたって、所与の利回りを仮定して将来評価額を可視化するシンプルなツールが広く使われており、特に投資初心者にとっての大まかな目安には有用である¹。他方で、リターンだけでなくボラティリティや尾部確率を含むリスクの全体像までを伝える設計はまだ十分とは言いがたい。長期運用の評価には、(i) 確率モデルから乱数で資産価格系列を発生させるモンテカルロ・シミュレーションと、(ii) 過去の資産価格データの連続期間をずらして繰り返すローリング法によるバックテストがあり、それぞれ利点と制約がある。後者はモデル仮定を置かない一方で、運用の検証期間が長期になるほど、取り出せる期間が互いに大きく重複し、評価結果は観測期間固有の値動きに強く依存してしまうという問題がある。前者にはモデルの仮定が必要になり、それがいかに現実のデータの挙動を捉えられるかが成否を分けるが、一旦モデル化に成功した場合には、超長期のシミュレーションを自由にできる点が強みである。本稿が対象とする新 NISA のシミュレーションはしばしば超長期を想定する必要がある。よって、モンテカルロ法に用いる資産価格モデルおよび物価

推移モデルの精緻化を試みる。

本研究は、長期インデックス投資の積立・取り崩しを、簡便な幾何ブラウン運動 (Geometric Brownian Motion: 以下 GBM) モデルと、より現実のデータ特性を反映する ARMA-EGARCH-skew-t (以下 AES) モデルで比較し、モデルの精緻化が元本割れ・枯渇確率に与える影響を定量的に検証する。なお、以下の分析は、異なる価格モデルの採用が長期シミュレーション結果の分布に与える影響を比較する記述的分析であり、最適な投資行動や取り崩し率の導出を目的としない。

投資対象として用いるデータは、一般的な日本人個人投資家がインデックスファンドに毎月積立、あるいは、取り崩しすることを想定して、円建ての S&P500, MSCI ACWI, TOPIX (いずれも配当込みトータルリターン) とする。また、取り崩しの際、考慮に入れるべき CPI も同時期の月次データを観測した。株式指数リターン分布の左裾が厚くなるのに対して、CPI 変化率分布は右裾が厚い。この特徴を捉えるのが本稿のモデル化の要点である。

本稿では、過去のデータから AES モデルを最尤推定し、その推定モデルから 50 年分の発生系列を多数生成して、GBM モデルからの発生系列と積立評価額や取り崩しの枯渇確率を比較する。その際、同一の一樣乱数系列を用いて GBM モデル と AES モデル の差をモデル構造の違いに帰着できるように設計した。その上で、新 NISA の非課税保有限度額 (1800万円。以下、総枠)・年間投資枠 (360万円) に合わせた複数の積立パターン、ならびに初期資産の一定割合

1 一定の利回りを想定して将来の資産額を見積もるものとしては、金融庁つみたてシミュレーター、楽天証券積立かんたんシミュレーションなどがある。リターンに加えて、ボラティリティを考慮して、将来の資産額の確率分布に言及するものとしては、野村アセットマネジメント将来シミュレーション、三菱 UFJ アセットマネジメントつみたて投資シミュレーション、取り崩しシミュレーションなどがある。

をインフレ調整して取り崩す方式をとる。なお、本稿で観測した株価と物価の相関は低く推移しており、モデル化の際は独立過程として扱う。

得られた結論は以下の通りである。AES モデルは株価の下方テイルと物価の上方テイルをより忠実に反映するため、GBM モデルのテイル確率の過小評価を修正して大きく見積もることになる。もっとも、その差は安定的に小さく、個人投資家の現実的な意思決定を大きく左右するほどではない。すなわち GBM は簡便という利点を保ちつつ、テイルの過小評価に留意して用いれば実用上の支障は小さい。本稿はこの点を、積立・取り崩しの双方で具体的に示す。

本稿の構成は次のとおりである。次章では関連研究を概観し本稿の位置づけを明確にする。第3章でデータの要点を示し、第4章でモデルを述べ、第5章で推定結果を報告する。第6章でシミュレーション設計と結果を示し、第7章で結論を述べる。

2. 先行研究と本稿の位置づけ

本節では、退職後の取り崩し率、シミュレーション手法、リターン分布の経験則とボラティリティ・モデル、インフレ過程の順に関連研究を概観し、これらを踏まえた本稿の位置づけを明確にする。

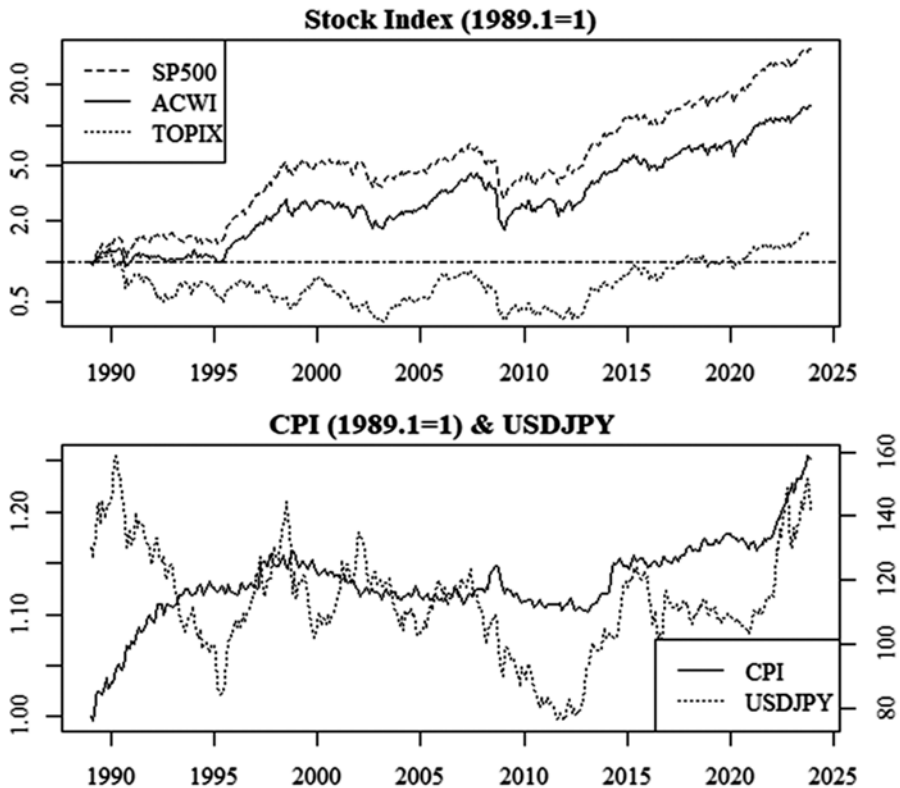
退職後資産の取り崩し率については、Bengen (1994) が米国の長期データに基づき、実質 4%・30 年の持続可能性を示したのが嚆矢である。これに続く Cooley, Hubbard & Walz (1998) はローリング法によるバックテストを用いた取り崩し成功率の研究として有名であり、トリニティ・スタディと呼ばれる。株式比率が高いポートフォリオほど実質 4%程度

の取り崩しは運用ポートフォリオ維持可能性が高いとすることから、4%ルールとも呼ばれ、実務的な文脈でしばしば引用される。このルールの米国外への応用については Pfau (2010) がリスクを指摘し、低利回り環境での安全率低下は Finke, Pfau & Blanchett (2013) などが論じている。近年では、極端な下落を確率的に組み込んだモンテカルロ・シミュレーションにより 4%ルールの頑健性を再検証する試みもある (Tamimi et al., 2024)。本稿の関心である極端な下振れ、すなわち、資産収益率の左裾の厚さが与える取り崩し成功率への影響は先行研究でも繰り返し確認されてきた。

シミュレーション手法としては、ローリング法とモンテカルロ法が併用されてきたが、前者は運用の検証期間が長期になるほど、異なるサンプルパスがほとんど得られず時期依存が強まる一方、後者は採用モデルの仮定が結果を左右する。Cooley, Hubbard & Walz (2003, 2011) は、ローリング法バックテストと GBM モデルを用いたモンテカルロ法を比較し、長期になるほど両者の取り崩し成功率に差が生じることを示した。長期シミュレーションにおいて、平均・分散が一定の GBM モデルを採用するのは無理があり、収益率分布のファットテイルや極端な下落をモデル化できていない。よって、本稿では AES を用いて時変分散やテイルリスク組み込んだ長期シミュレーションに耐えうる仕様を採る。

資産収益率の非正規性、とりわけファットテイル (高い尖度)、は古典的研究に遡る (Mandelbrot, 1963; Fama, 1965)。現在では、広く金融データで観測されるボラティリティ・クラスタリングは ARCH モデル (Engle, 1982) や GARCH モデル (Bollerslev, 1986) で

図表1 配当込み株式指数（上段）・CPIとドル円為替レート（下段）の推移



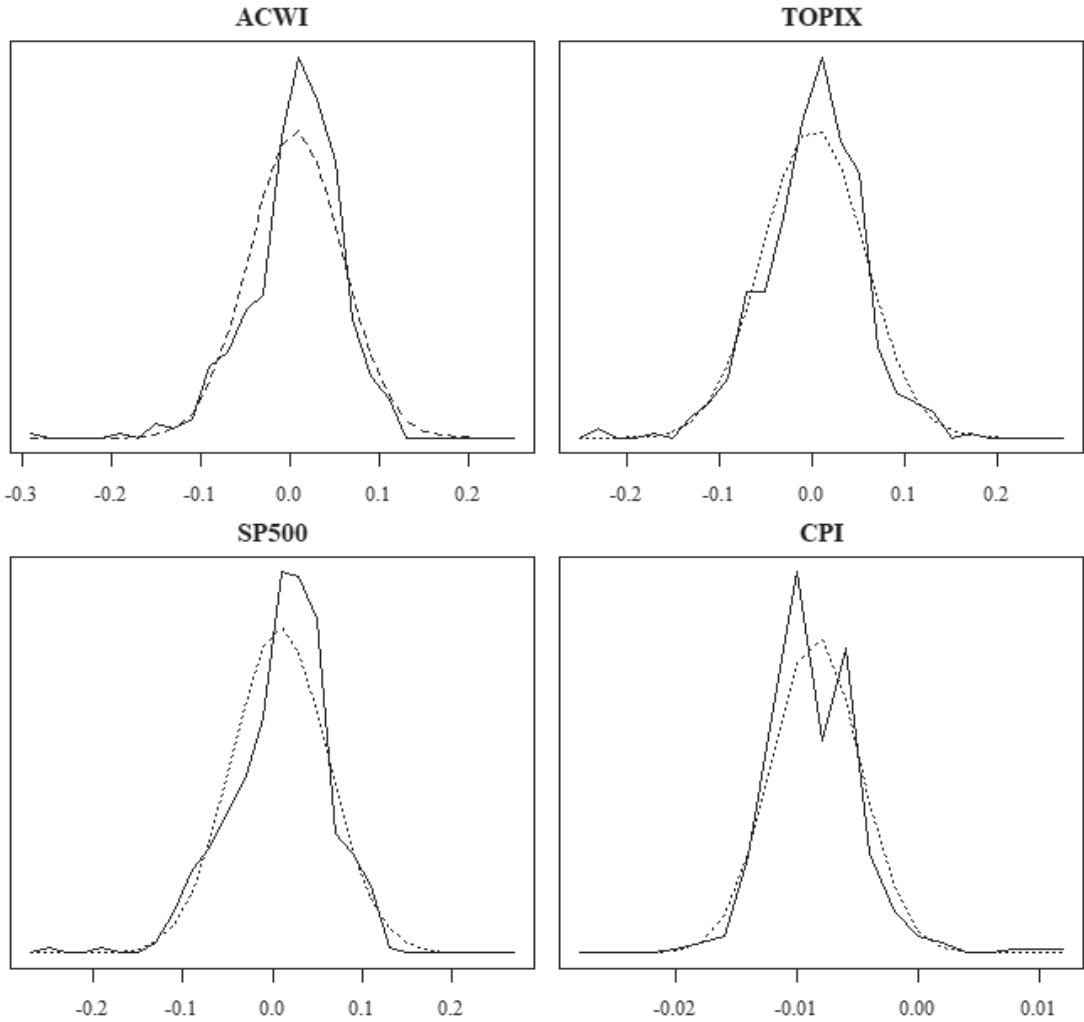
(注) SP500とACWIについては円換算済み。
(出所) 著者作成。

記述されることが標準化されている。またその拡張として、株価データでしばしばみられる下落時の非対称性（レバレッジ効果）を記述するために、符号効果を通じて非対称を表現できるEGARCH(Nelson, 1991)やGJR-GARCH(Glosten et al., 1993)が用いられてきた。さらに、攪乱項の分布自体を拡張するアプローチとして、Hansen (1994) や Fernández & Steel (1998) の非対称 t 分布を用いるモデルも広く研究されており、市場リスク評価の実務でも用いられることがある。

インフレ過程については、インフレ上昇局面で変動が拡大し、右裾が厚い振る舞いが観察さ

れる。こうした特性は、Engle (1982) が英国インフレ率の分析を通じて ARCH モデルを提案したことにも示されるように、インフレ率が時変的な分散構造を持ち得ることを示唆している。一方、株式リターンは左裾が厚い。この組み合わせは、取り崩しにおいて評価額の低下(株価急落)と取り崩し額の増大(物価急騰の反映)が同時に進みうることを意味し、枯渇確率の増幅要因となる。本稿で観測された経験分布(図表2)と、インフレを右裾の長い対数正規分布、株式リターンを左裾の長いワイブル分布とする Tamimi et al. (2024) のモデル化とも整合的である。

図表2 対数差分系列の分布と基本統計量



	平均 年率(%)	標準偏差 年率(%)	歪度	超過尖度	相関			
					ACWI	SP500	TOPIX	CPI
ACWI	7.55	17.82	-0.97	2.93	1.00			
SP500	10.28	18.46	-0.69	1.33	0.94	1.00		
TOPIX	1.43	18.60	-0.43	1.30	0.69	0.52	1.00	
調整済みCPI	0.55	0.99	1.03	5.55	0.04	0.04	0.06	1.00

(注) 実線が対数差分系列の経験分布、点線が経験分布と同じ平均と標準偏差をもつ正規分布である。
 (出所) 著者作成。

以上を踏まえると、GBM モデルは分布の中心部分の挙動の理解に適した簡便な近似であるものの、尾部の厚さと非対称、時変のボラティ

リティを十分に捉えないおそれがある。本稿では、AES モデルを推定し、同一の一様乱数系列を用いた GBM モデルの対照により、分布・

ボラティリティ構造の相違だけを抽出して、積立・取り崩しの元本割れ・枯渇確率を比較する。ここでは特に、新 NISA の総枠・年間投資枠およびインフレ連動の取り崩しという制度・運用上の条件を明示的に実装し、個人投資家の意思決定に照らした実務的な差の大きさを検討する。以下では、この立場からデータとモデルを順に述べる。

3. データ

3.1 基本統計量

本稿で使用する過去データは S&P500TR (Total Return), MSCIACWI (Morgan Stanley Capital International All Country World Index 配当込み指数), TOPIX 配当込み指数, ドル円為替レート, 消費者物価指数の1989年1月から2023年12月までの420か月分の月次データである²。S&P500TR と MSCIACWI はドル建てなのでドル円為替レートを乗じて円建てにする。また、これらの指数がすべて配当込みのトータルリターンであるのは、本稿では日本国内の個人投資家が分配金再投資型の全米株式あるいは全世界株式の指数連動型投資信託を為替ヘッジ無しで投資することを想定しているためである。本稿では、円建て S&P500TR, 円建て ACWI, TOPIX 配当込み指数をそれぞれ

れ SP500, ACWI, TOPIX と表記する。また適宜、対応する市場名 (米国株, 全世界株, 日本株) も併用する。

図表 1 に 3 つの配当込み株式指数と CPI 及びドル円為替レートの推移を示した。観測期間内で米国株は36.17倍に増加したが、日本株は1.65倍にしかなっていない。全世界株は米国株が約6割を占めるため、米国株と同じような推移をみせているが、米国ほど株式市場が好調でなかった日本を含む他の地域の影響を織り込んだ結果、13.95倍に成長してきた。日本の CPI は観測期間のほとんどで横ばいであったが、直近でようやく上昇をみせている。CPI には12か月周期の季節性があるため次節以降のモデル化には季節調整済み CPI を用いる³。本稿では株式指数の収益率や物価指数の変化率などはすべて対数差分で定義する⁴。

これらの対数差分系列の年換算の平均、標準偏差などの基本統計量を図表 2 に示した。ボラティリティ (収益率の標準偏差) は3つの株式指数で同程度である。また、いずれの株式指数と CPI の相関も本稿の観測期間では一貫して低い⁵、次章以降では両者を独立した1変数モデルとして扱う。本稿では、各株式指数を個別のシミュレーション対象として扱い、ポートフォリオを構成しないため、株式指数同士の相関構造は分析の射程外とする。

図表 2 において各対数差分系列の正規分布の

2 S&P500TR とドル円為替レートは Yahoo!Finance, ACWI 配当込みは MSCI のウェブサイト, CPI は総務省統計局のウェブサイトから入手した。TOPIX 指数データとその配当データは Investing.com から入手し、配当込み指数を算出した。

3 R の decompose 関数により seasonal 成分を除去した時系列データを用いてモデル化し6章のシミュレーションでは、seasonal 成分を再加算することで季節性を復元した。

4 これら4つの系列について単位根検定を行った結果、原系列と対数系列については非定常、差分と対数差分については定常であった。また、4つの対数系列について Johansen 検定を行い共積分関係がないことも確認した。

5 図表 2 では観測期間を通じての相関係数を示したが、基本的に相関係数は時变的と考えられるため、DCC-GARCH (Dynamic conditional correlation-generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) モデルを推定して各株式指数の収益率と季節調整済みインフレ率の時变的な相関係数を計測し、観測期間を通じて低い相関であることを確認した。

尖度3を基準にした超過尖度はすべて正の値であった。これは株式指数の月次収益率やCPI月次変化率の無条件分布がファットテイルであること、すなわち、ブラック＝ショールズモデル（GBMモデル）のような標準的なファイナンス理論で仮定される正規分布よりも極端な事象が起こる確率が高いことを意味する。さらに分布の左右非対称性を表す歪度をみると、株式指数については負、CPIについては正となっており、前者は左裾が厚く、後者は右裾が厚い分布になっている。つまり、株式については正規分布で想定されるよりも大きな下落が実際には数多く観測され、物価については急激な上昇が現実には起こっている。以上の現象を図示すると図表2の月次分布のグラフのようになる。現実のデータの挙動をよりよく捉え、ここで示された月次分布の特徴を再現しうるモデルとして4章でAESモデルを導入する。

3.2 単一期間のバックテスト

この節では過去のデータを使った積立と取り崩しのバックテストを行う。図表3に1989年1月から全世界株、米国株、及び日本株ファンドに毎月定額積立を実行した場合の35年間の評価額の推移を示した。新NISAの年間投資枠は360万円なので、毎月30万円を積立すると、5年で総枠1800万円を埋めることになる⁶。本稿では新NISA単独の運用パフォーマンスに焦点をあてるため、積立完了後の30年間は売買をせず、同一ファンドの保有を継続するものとす

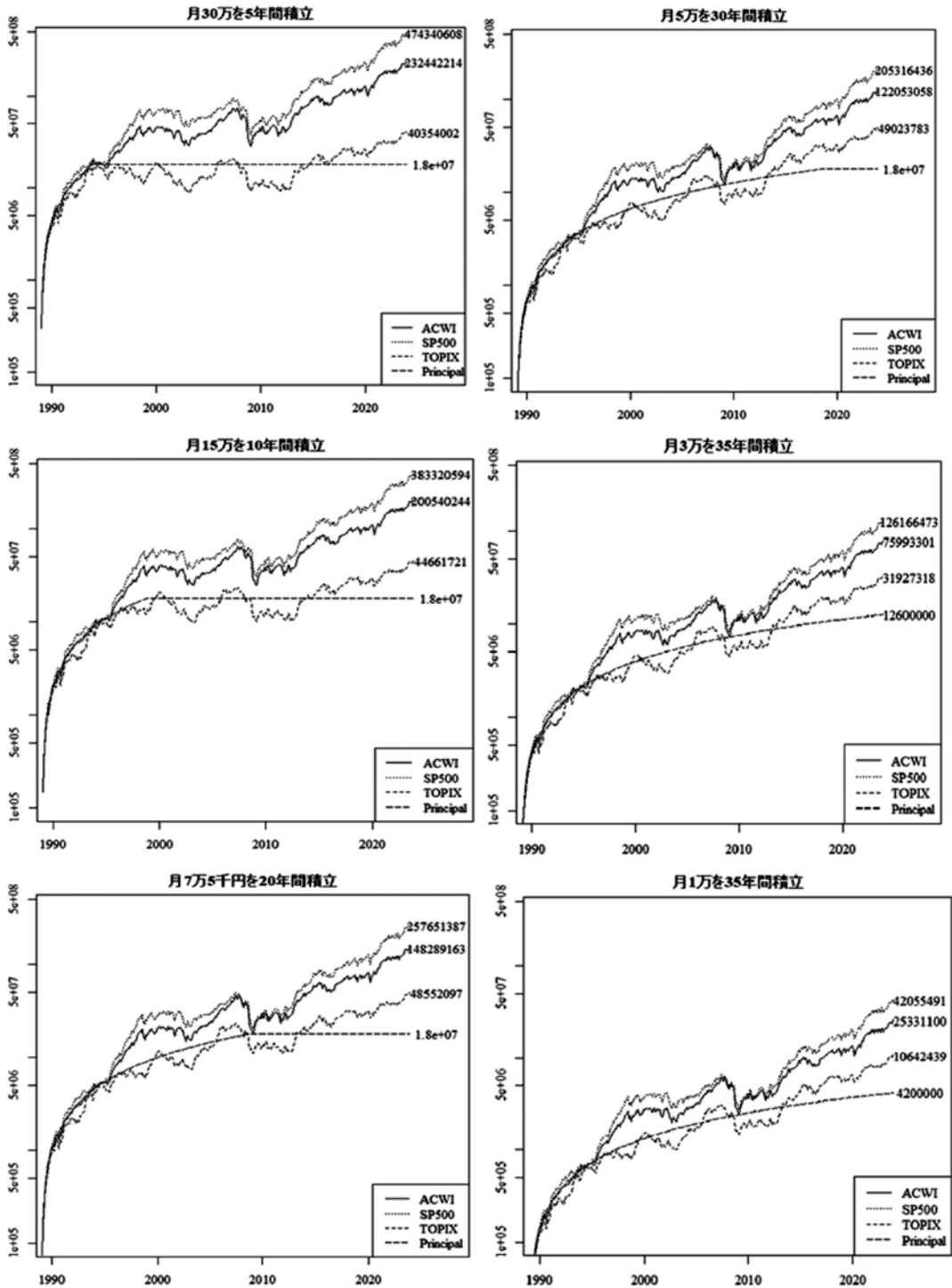
る⁷。図表3の上段左のグラフが月30万円積立のケースを示している。以下、中段左に月15万円積立、下段左に月7万5千円積立、上段右に月5万円積立のケースを同様に示した。また中段右の月3万円積立の場合は35年では総枠1800万円は使い切れず1242万円の投資額に対して米国株なら1億円以上、全世界株なら7000万円以上、日本株でも3000万円以上の評価額となっている。下段右の月1万円積立でも414万円の投資元本に対し、日本株でも2倍以上、全世界や米国株なら2千万円問題を解決している。なお、月3万円積立と月1万円積立では、どちらも総枠を使い切る途中なので、投資元本や評価額は後者の結果は単純に前者の結果の3分の1になっている。

次に図表4に観測期間中での取り崩しバックテストの結果を示す。本稿では初期資産額の一定割合を毎月取り崩すことにする。例えばトリニティ・スタディなどで有名な年率4%取り崩しの場合、毎月初期資産額1の0.333…%（4%÷12）を取り崩す。ただし、物価水準に応じて取り崩し額は変化させるものとする。また、資産額が0以下になった場合を枯渇とよび、それ以降の運用は行わず資産額0として推移させる。年率1%取り崩しの場合、日本株でも枯渇しないが、2%で取り崩すと開始から217か月（2007年1月）に枯渇する。全世界株の場合は6%で取り崩すと406か月（2022年10月）に枯渇する。取り崩し率を10%にした場合には米国株ですら311か月（2014年11月）で資金が枯渇

6 新NISAには「つみたて投資枠」と「成長投資枠」があり、それぞれ年上限120万円・240万円であるが、本稿で想定する投資対象ファンドは両枠で投資可能である。

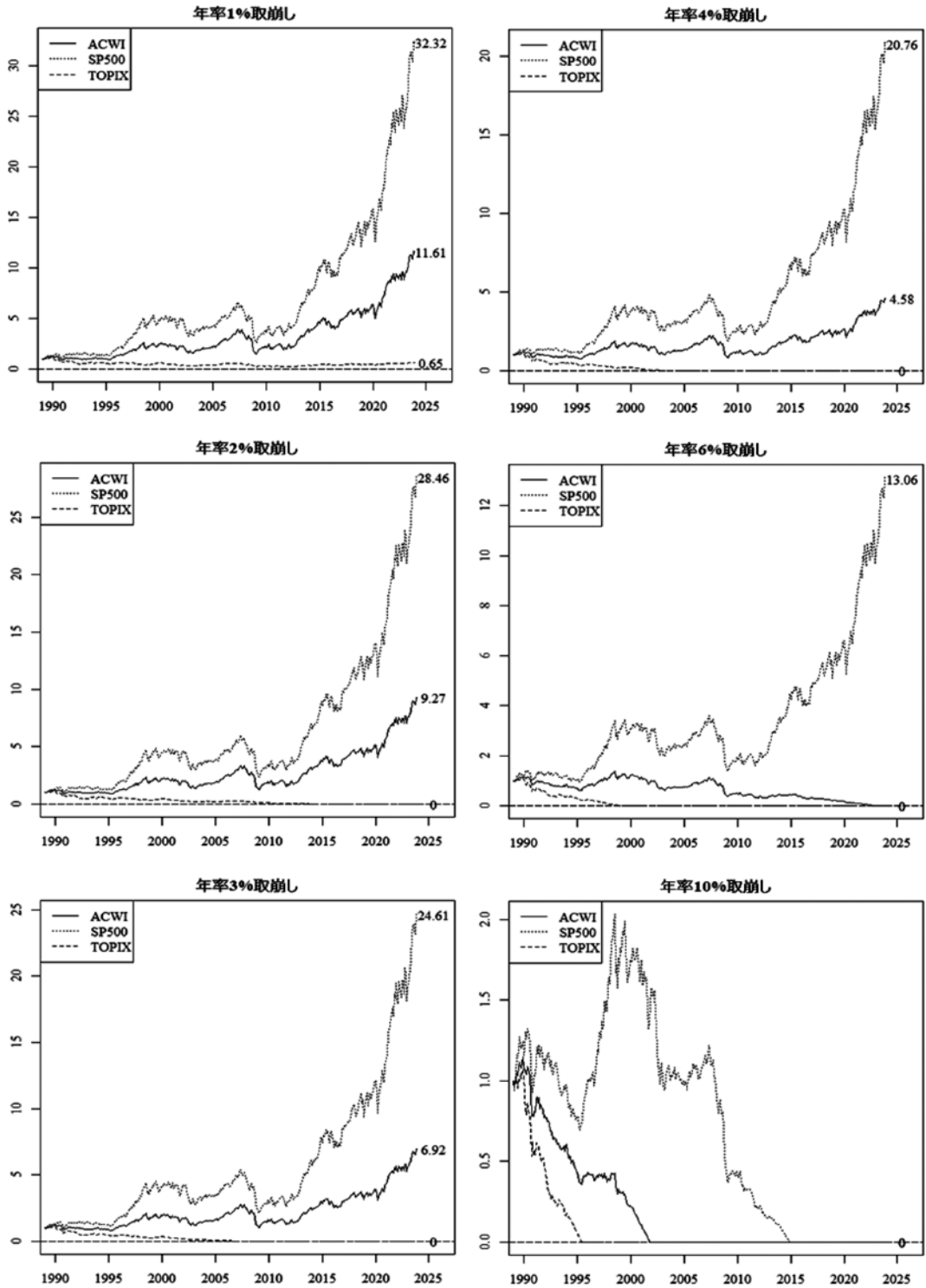
7 新NISAでは売却した商品の取得価額（簿価）分が翌年以降に再利用可能である。総枠1800万円を使い切った後に評価損となっている場合、取得価額（簿価）ベースで年間投資枠（360万円）相当を売却し、翌年に年間投資枠（360万円）で買い直すと、平均取得価額が下がって同じ総枠1800万円の範囲内でも非課税で保有できる口数（数量）が増え得るが、この取引を組み込むと累積の投資元本が1800万円を超えるケースが生じ、同一積立額ケース間の比較が成立しなくなるため、本稿では扱わない。取り崩し局面で再投資まで許す場合も、消費・再投資ルールの仮定が必要となり比較設計が別物となるため、扱わない。

図表3 積立バックテスト



(出所) 著者作成。

図表4 取り崩しバックテスト



(出所) 著者作成。

することがわかる。

3.3 ローリング法によるバックテスト

この節ではローリング法によるバックテストの結果を示す。この方法では観測期間の一部の期間を繰り返し切り取ってバックテストを行い、積立や取り崩しの評価額の分布を得ることができる。例えば、運用年数を10年（120か月）とする場合、[1989年1月, 1998年12月], [1989年2月, 1999年1月], …, [2014年1月, 2023年12月] というように期間の異なるバックテストの結果を300通り得る。一般に観測期間が n か月、運用月数を k か月とすると $n-k$ 通りのサンプルパスの積立や取り崩しの結果を得る。よって、 k が n に近づくにつれてバックテストの回数は減ってしまう。特に、検証したい運用期間 k がデータの観測期間とあまり変わらない程長くなると、異なるバックテスト期間といっても、それらの期間のデータの重複は多く、ほとんど同一のサンプルパスでのバックテストしかできないことになるので、あまり長い運用期間のパフォーマンスを評価するには向かない。

図表5にローリング法バックテストによる積立の元本割れ確率を示した。運用年数10年の場

合、月30万円積立なら5年で積立が終り、月5万円から月15万円積立では積立額は異なるが10年間ずっと積立を継続しているので、元本割れ確率は同一である。ACWIとSP500の場合どの積立額でも20年運用すると元本割れする確率はゼロとなる。TOPIXでも30年運用すると元本割れ確率がゼロになる。

図表6はローリング法バックテストで取り崩しの枯渇確率を計算した結果である。上述の単一サンプルパスのバックテストの時と同様、取り崩し開始時の資産額の一定割合を物価水準に合わせて毎月取り崩した。ACWIとTOPIXに関しては取り崩し率が大きいほど、また、運用年数が増えるほど枯渇確率が上がるという自然な結果になっている。SP500に関しては取り崩し率6～8%において運用年数20年の枯渇確率が30年のそれを上回るという直観に反する結果となっている。資産取り崩し開始直後に株価の大きな下落に見舞われ資産額が縮小した場合、最終的に資産が枯渇する確率が高くなる。運用年数20年の場合は2000年代初頭のドットコムバブル崩壊がちょうど取り崩し開始直後にあたり、その後資産が回復する前にリーマンショックを迎えるというサンプルパスが含まれ

図表5 ローリング法バックテストによる積立の元本割れ確率

	運用年数	月5万円積立	月10万円積立	月15万円積立	月30万円積立
ACWI	10	10.67	10.67	10.67	4.67
	20	0.00	0.00	0.00	0.00
	30	0.00	0.00	0.00	0.00
SP500	10	13.00	13.00	13.00	13.67
	20	0.00	0.00	0.00	0.00
	30	0.00	0.00	0.00	0.00
TOPIX	10	38.00	38.00	38.00	52.00
	20	28.33	28.89	28.89	31.11
	30	0.00	0.00	0.00	0.00

(出所) 著者作成。

図表6 ローリング法バックテストによる取り崩しの枯渇確率

年数\取崩率	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
ACWI	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.000
	20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	8.889	47.778
	30	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	23.333	70.000
SP500	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	18.333	33.889
	30	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10.000
TOPIX	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.333	4.667	24.000
	20	0.000	0.000	10.000	31.667	66.111	80.556	95.556
	30	0.000	26.667	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

(出所) 著者作成。

る。一方、運用期間が30年になると、取り崩し開始時点が1989年1月から1993年12月に限定され、比較的株価が安定した時期の後、90年代後半の上昇期を迎えるので、その後のドットコムバブルやリーマンショックで資産が枯渇しにくいサンプルパスとなっていて、取り崩し率が8%になってようやく枯渇率が10%になる。

SP500の場合のような不自然な結果はローリング法の限界を示している。運用期間が観測期間に近づくほどサンプルパスの重複が大きくなり、実質的に独立した検証にならないためである。上述の通り、この方法は長期運用のパフォーマンス検証には適さない。

4. モデル

4.1 ARMA-EGARCH-skew-t モデル

SP500, ACWI, TOPIX, 及び季節調整済みCPIの4系列の対数差分 r_t を

$$X_t = r_t - \bar{r}, \quad \bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^T r_t}{T}$$

と平均からの偏差 X_t に変換し、 X_t を定常ARMA

モデル、さらに X_t の条件付き分散に Nelson (1991) の EGARCH モデルを仮定する。すなわち、

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^m (\alpha_j z_{t-j} + \gamma_j (|z_{t-j}| - E|z_{t-j}|)) + \sum_{j=1}^r \beta_j \log \sigma_{t-j}^2$$

とする。これを ARMA(p,q)-EGARCH(r,m) モデルとよぶ。 a_j は符号効果を表し、これが負(正)の値をとるとき、 j 期前における負のショックが t 期の条件付き分散 σ_t^2 を増加(減少)させる。逆に j 期前における正のショックは条件付き分散 σ_t^2 を減少(増加)させる。 γ_j をサイズ効果といい、これが正の値をとるとき、過去の大きなショックが現在のボラティリティ σ_t^2 を増大させる。 β_j はボラティリティの持続性を表す。

また、 z_t は独立同一で平均0、分散1の非対称t分布に従うとする。本稿では Fernandez

and Steel (1998) の非対称 t 分布を用いる。この分布の密度関数 $f^*(x)$ は、自由度 ν の t 分布の密度関数を $f(x)$ としたとき、

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{2\delta}{1+\delta^2} f(\delta x), & x < 0 \\ \frac{2\delta}{1+\delta^2} f\left(\frac{x}{\delta}\right), & x \geq 0 \end{cases}$$

で定義される。この密度関数は $x=0$ に対して左右非対称になっており、 $0 < \delta < 1$ のとき、左裾が長く、 $\delta > 1$ のとき、右裾が長い分布になる。また、 ν が小さいほど正規分布と比べて分布の裾が厚くなる。 $\delta = 1$ かつ $\nu \rightarrow \infty$ のとき標準正規分布となる。

以上のようにモデル化することにより、前章でみた月次対数差分系列の無条件分布の特徴を捉えることができる。分布の裾の厚さは条件付き分散が時間を通じて一定でなく、持続性を持つことによって生じ、ファイナンスの文献ではしばしばこの現象をボラティリティ・クラスタリングとよぶ。また無条件分布の非対称性は EGARCH モデルが過去の標準化攪乱項 z_{t-j} の符号により条件付き分散の式が変化することから生じ、株価が下落するときは上昇するときよりボラティリティが大きくなりやすいという現象をモデル化している。この現象はしばしばレバレッジ効果と解釈される。

条件付き分散の EGARCH モデルによる定式化により、標準化誤差項 z_t の分布が標準正規分布でも上記の無条件分布の特徴はある程度反映される。しかし、次章の推定パラメータで示される通り、実際のデータの分布の裾の厚さと非対称性の程度を十分に表現するには不十分である。よって、条件付き分散の定式化だけでは捉えきれない月次無条件分布の裾の厚さと非対称性を、 z_t の分布に非対称 t 分布を用いること

で補う必要がある。

4.2 幾何ブラウン運動モデル

幾何ブラウン運動モデルは対数差分系列が時間を通じて一定の平均と分散を持つ独立同一の正規分布に従うとするモデルである。よって、上述の AES モデルで ARMA(0,0)-EGARCH(0,0) かつ f^* が標準正規分布の密度関数の場合が、GBM モデルに相当し、AES モデルの特殊ケースである。

前章の図表 2 で対数差分系列の月次無条件分布（実線）と共に同一の平均と分散を持つ正規分布（破線）で表した。幾何ブラウン運動モデルを仮定するという事は、実際の分布は実線のようにになっているのにもかかわらず、簡易的に破線の分布を用いていることに他ならない。このような簡略化がどの程度許容されるかを、特に 6 章では積立や取り崩しにおける分布の裾にあらわれるテイルリスクという観点で論じる。

5. 推定

前章のモデルを 3 章でみたデータに適用して推定する。推定には最尤法を用いる。AES モデルの次数は基本的に BIC によって選択する。本稿では後のモンテカルロ・シミュレーションで大量のデータを発生させるため、計算時間の都合上、AIC と比較してより低い次数を選択する BIC を採用した。

条件付き平均モデルの次数はインフレ率に関しては ARMA(0,1) モデル、すなわち MA(1) モデル、それ以外については ARMA(0,0) モデルが選択された。条件付き分散モデルの次数はいずれの系列についても EGARCH(1,1) が選択された⁸。

図表7 AESモデルの推定と残差診断

	ACWI	SP500	TOPIX	CPI
b_1				0.003
ω	-1.185	-1.698 *	-0.460 ***	-1.277 ***
α_1	-0.185	-0.139 *	-0.109 ***	0.110 **
β_1	0.803 *	0.714 ***	0.922 ***	0.892 ***
γ_1	0.134	0.175 *	0.057 ***	0.054 *
δ	0.707 ***	0.751 ***	0.849 ***	1.153 ***
ν	10.681 *	14.036	16.732	5.576 ***
LB(36)	26.301	36.705	24.781	40.110
LB2(36)	18.562	34.750	31.304	7.428
LB(60)	64.567	74.587 *	50.578	59.843
LB2(60)	32.067	52.042	59.361	13.971
KS	0.034	0.029	0.042	0.036
AD1	0.253	0.355	0.300	0.511
AD2	0.253	0.354	0.300	0.511

(注) ***は1%有意, **は5%有意, *は10%有意を表す。LBとLB2はそれぞれ、標準化残差とその2乗のリャン・ボックス検定統計量を表す。KSはコルモゴロフ・スミルノフ検定統計量、AD1とAD2はそれぞれ、アンダーソン・ダーリング検定統計量のバージョン1と2を表す。

(出所) 著者作成。

図表7に各パラメータの推定値を示した。月次インフレ率についてはMA(1)モデルが選ばれ、その係数は正の値ではあるものの有意ではない。よってほぼ持続性はないとみなすことができる。その他株式指数の収益率に関しては自己相関はないとよい。

次に条件付き分散モデルについては全ての系列で持続性がみられる⁹。非対称性の方向性は α_1 の符号にみられるように(ただし、ACWIについては有意ではない)、3種の株式指数と物価指数では反対になる。以上の2点はどちらも図表2でみられた月次無条件分布の特徴と整合的である。

また、 z_t の分布に関するパラメータについても、t分布の自由度 ν はすべての系列で17以下

となっており、分布の裾の厚さを示している。非対称性を表す δ は株式指数については左裾、物価指数については右裾が長くなっていることがわかる。この z_t の分布の特徴と上記で述べた条件付き分散の定式化に由来する特徴が掛け合わさって、最終的に図表2で示した月次無条件分布のファットテイルと非対称性を再現できる。

最後にこのモデルの定式化が妥当か否かを確かめるために、残差を診断する。AESモデル推定から得られる残差 $\hat{\varepsilon}_t$ とボラティリティの推定値 $\hat{\sigma}_t$ から標準化残差

$$\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

を算出し、独立同一の非対称t分布に従うとい

8 日本株に関してはEGARCH(1,3)のBICが最小だったが、残差診断をパスしなかったため、BICが2番目に小さく残差診断をパスしたEGARCH(1,1)を選択した。

9 EGARCH(1,1)モデルが動学的に安定するには、Nelson(1991)が示したように、持続性パラメータ β_1 が $|\beta_1| < 1$ を満たす必要がある。ここで推定された β_1 はいずれもこの条件を満たしている。

う仮定が妥当か確認する。まず、標準化残差系列とその2乗の系列に対してリャン・ボックス検定を行い系列相関が残っていないか確認した。図表7にその結果を示した。ここでは1次から36次までの自己相関がすべてゼロであるという帰無仮説の下での標準化残差とその2乗リャン・ボックス検定統計量を示している。すべての系列について帰無仮説は有意水準10%レベルでも棄却されず、標準化残差の無相関性は確保されているとあってよい。60次までのリャン・ボックス検定の結果も同様であった。

また、標準化残差の分布に関して、コルモゴロフ・スミルノフ検定とアンダーソン・ダーリング検定を行った。これら2つの検定は複数のデータの分布が同一の分布に従うという帰無仮説を検定するという点では共通しているが、前者は分布の中央部分、後者は分布の裾部分にウェイトを置くことができるという柔軟性がある。本研究のようにファイナンスにおけるテイルリスクのモデル化に焦点をあてる場合は後者の結果の方がより重要である。ここでは標準化残差の分布と推定されたパラメータをもつ非対称t分布が同一であるという帰無仮説を検定する。アンダーソン・ダーリング検定にはバージョン1とバージョン2がある。前者はコルモゴロフ・スミルノフ検定同様、分布の中央部分の評価に重きを置くものであるが、後者は分布の裾部分の差をより評価する検定となっている。図表7によると4系列すべての3つの検定において帰無仮説は有意水準10%でも棄却できない。すなわち、標準化残差は非対称t分布によるモデル化で十分であり、特にアンダーソン・ダーリング検定のバージョン2の結果は分布の裾部分のモデル化の妥当性を支持している。サンプル内にはリーマンショック等の月次の大きな下

落も含まれており、計量ファイナンス分析の文脈では、しばしば、下方ジャンプ過程などの追加的なモデル化が必要とされる場合があるが、今回の分析では AES モデルで十分であると言える。

6. シミュレーション

6.1 各時系列の発生

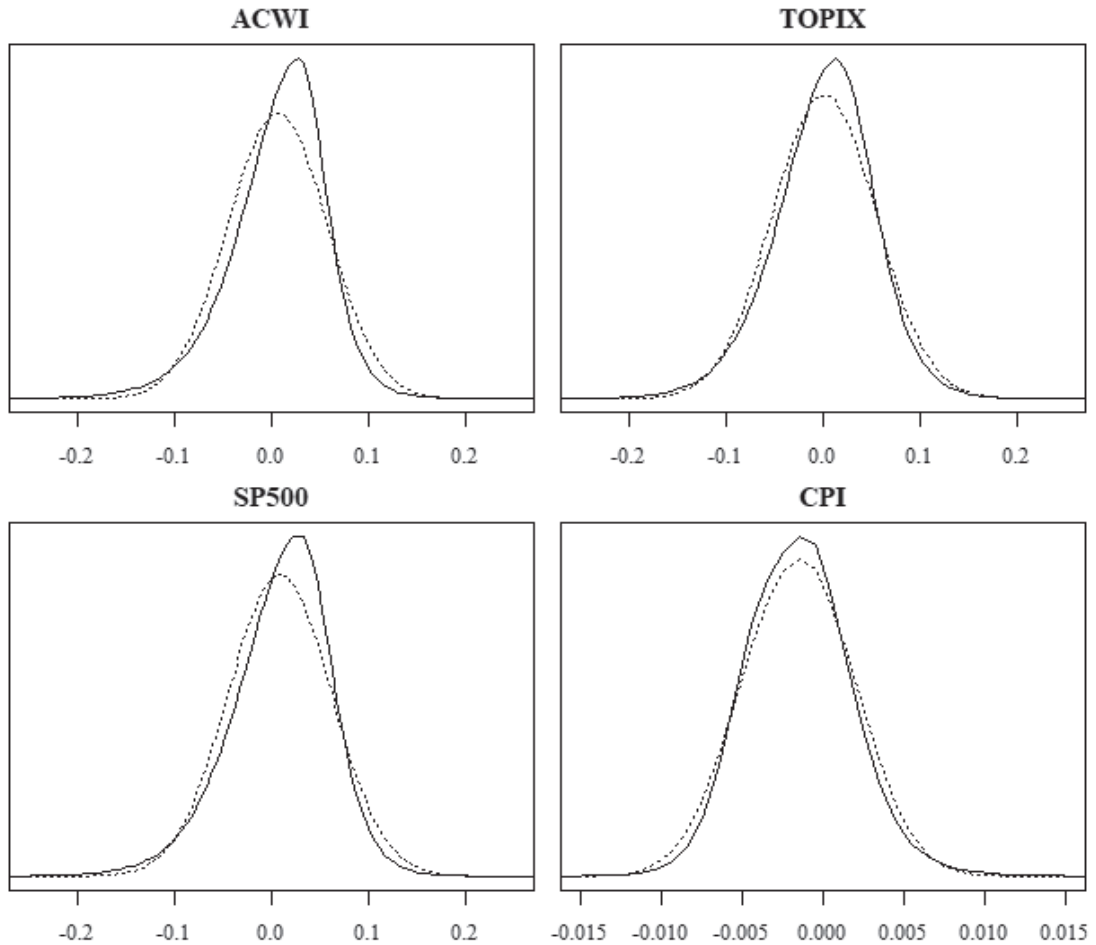
前章で得た推定モデルを用いて50年分すなわち600か月分のデータをそれぞれ5000通り発生させた。シミュレーションの際の初期値は、推定期間の最終時点の2023年12月の実績値（ボラティリティに関しては推定値）を使う。また、GBMとAESの2つのモデルの違いに焦点をあてて比較するために、ここで発生させる標準化誤差項 z_t は2つのモデルについて同一の1様乱数（共通乱数；Common Random Numbers: CRN）から発生させる。すなわち、 u_t を区間 $[0,1]$ 上の1様乱数とすると、標準正規乱数 z_t^n と非対称t分布からの乱数 z_t^s はそれぞれ、

$$z_t^n = F_n^{-1}(u_t), \quad z_t^s = F_s^{-1}(u_t), \\ t = 1, 2, \dots, 600$$

として生成する。ただし、 $F_n(\cdot), F_s(\cdot)$ はそれぞれ、標準正規分布と非対称t分布の分布関数である。このCRNの採用により、GBMとAESのペア比較で元本割れ確率と枯渇率の差をモデル構造（分布・時変ボラティリティ）のみに帰着させることができる。

図表8にシミュレーションで発生させた600か月×5000系列（計300万）の月次収益率分布を示した。実線はAESモデル、破線はGBMモデルを用いて発生させたデータのヒストグラ

図表8 シミュレーションによる月次収益率分布



	平均(年率%)		標準偏差(年率%)		歪度		超過尖度	
	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM
ACWI	7.601	7.503	17.661	17.829	-0.785	-0.001	2.458	-0.002
SP500	10.390	10.302	18.229	18.460	-0.591	-0.001	1.367	0.000
TOPIX	1.520	1.441	18.299	18.613	-0.335	0.000	0.958	-0.001
調整済みCPI	0.553	0.548	0.953	0.985	0.590	0.000	4.749	0.003

(注) 実線が AES モデル、破線が GBM モデルによって発生させた収益率分布である。

(出所) 著者作成。

ムである。図表2で示した現実データの月次収益率の無条件分布を概ね再現しているといっ

よい。
AES モデルでは株式指数の収益率分布は GBM モデルの正規分布に比べて左裾が厚くな

る。すなわち、GBM モデルは大幅な価格の下落リスクを過小評価する。逆に、物価指数の変化率の分布については、物価上昇時にボラティリティが大きくなり、極端に大きなインフレ率につながるため、AES モデルは右裾を厚くす

る。これはGBMモデルがインフレ上昇リスクを過小評価することを意味する。このようにモデルの精緻化によってより正確に評価されたテイルリスクが、実際の積立や取り崩しに与える影響を次節以降で考察する。

6.2 積立シミュレーション

ここでは前節で発生させた50年分の価格系列を使って、新NISAの投資可能枠で積立投資を実行した場合の資産推移のシミュレーションを行う。新NISAの総枠は一人当たり1800万円、年間投資枠は360万円である。例えば、毎月30万円積立投資することによって最短5年で総枠を使い切ることができる。その後は追加で投資はせず、NISA口座内のみの資産推移をみる。その他の積立パターンとしては、毎月15万円積立なら10年、10万円なら15年、5万円なら30年、3万円なら50年で総枠を埋めることになる。

本稿の設定で得られる評価額の中央値は、GBMとAESの間で大差がなく、一定の利回

りを仮定した簡便な積立シミュレーションが与える値とも概ね一致する。したがって、中央値の水準を目安として把握する段階では、こうした近似でも十分な示唆を与える。他方で、運用計画にとってより重要なのは分布の裾に位置する結果であり、特に長期積立における元本割れのような稀な事象に関する確率である。

図表9に上記の積立シミュレーションにおける元本割れ確率を示した。5%を下回るような小さな元本割れ確率を示す場合（表中のグレーの部分）はAESモデルのシミュレーション確率がGBMモデルのそれを上回っている（太字部分：米国株月5万円積立、50年の場合を除く）。これは図表2や図表8でみられる株式指数収益率の左裾の厚さによるものである。すなわち、簡単なGBMモデルは、より現実データの挙動を反映したAESモデルよりも極端な下落のリスクを過少評価することになる。

GBMモデルよりも正確な評価を求めてAESモデルを使うべきかどうかは、投資家の目的次

図表9 積立における元本割れ確率

		3万円以下		5万円		10万円		15万円		30万円	
		AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM
ACWI	10	10.76	11.00	10.76	11.00	10.76	11.00	10.76	11.00	10.38	10.26
	20	4.80	4.46	4.80	4.46	4.54	4.28	4.14	3.78	3.78	3.48
	30	2.28	1.70	2.28	1.70	1.76	1.50	1.68	1.36	1.58	1.36
	40	0.98	0.90	0.82	0.82	0.86	0.72	0.84	0.62	0.76	0.64
	50	0.56	0.44	0.50	0.30	0.42	0.28	0.28	0.26	0.22	0.22
SP500	10	5.54	5.68	5.54	5.68	5.54	5.68	5.54	5.68	4.90	4.82
	20	1.48	1.38	1.48	1.38	1.40	1.28	1.14	0.98	1.10	0.80
	30	0.46	0.30	0.46	0.30	0.26	0.18	0.18	0.22	0.10	0.10
	40	0.02	0.00	0.02	0.00	0.04	0.00	0.02	0.00	0.02	0.00
	50	0.02	0.02	0.02	0.04	0.02	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00
TOPIX	10	35.86	39.30	35.86	39.30	35.86	39.30	35.86	39.30	36.50	39.62
	20	32.70	35.54	32.70	35.54	33.02	35.74	33.22	36.10	32.80	35.68
	30	29.00	31.80	29.00	31.80	30.18	32.44	30.56	32.98	31.28	33.48
	40	28.42	30.78	28.82	31.24	29.48	31.28	29.86	31.58	29.94	31.74
	50	25.10	27.76	26.36	28.64	26.94	28.58	27.06	28.88	27.30	29.26

(出所) 著者作成。

第である。テイルリスクのわずかな違いが投資判断に影響しうる専門的な投資家も存在するかもしれないが、個人投資家が新 NISA で毎月積立をする場合の元本割れ確率を考えると、テイルリスクの過小評価といっても 1%ポイントに満たない差であり、実際の投資の意思決定に影響するほどではない。よって、テイルリスクをやや過小評価する点に留意すれば、GBM モデルは十分に実用に耐えうると考える。

6.3 取り崩しシミュレーション

ここでは6.1節で発生させた50年分の株式指数系列と消費者物価指数系列を使って、資産形成後の取り崩しシミュレーションを行う。初期値を 1 として、初期値の一定割合（年率 1～8%）に相当する額を毎月取り崩す。取り崩し額は物価水準に連動させる。資産額が 0 以下となった系列を枯渇系列とし、それ以後 0 で推移させる。枯渇確率は各時点の5000系列に占める枯渇系列の割合とする。

図表2や図表6でみたように、インフレ率の分布は右裾が厚くなっており、これは物価水準上昇時にボラティリティが大きくなり、極端に大きなインフレ上昇率は正規分布よりも大きい確率で起こることを意味する。よってGBMモデルのように株式指数の収益率やインフレ率に正規分布を仮定するということは、現実データよりも株式指数の極端な下落やインフレの急上昇の確率を過少評価していることになる。本稿では前述の通り株式指数と物価指数は独立と仮定しているが、株価の急落と物価の急騰が重なった時、すなわち、資産評価額の減少と取り崩し額の増大が同時に起きた時、枯渇リスクが増幅する。前節でみた積立における元本割れリスクは株式指数の左裾テイルリスクの過小評価

のみの影響であった。取り崩しにおいては、株価の左裾テイルリスクにインフレ率の右裾テイルリスクも加わることにより、積立の場合よりも深刻なGBMモデルによる過小評価が起こると考えられる。

また、過去データにおけるインフレ率の実績平均値は図表2で示した通り年率0.550%と低水準であり、極端にインフレ率が低い期間のデータとなっている。サンプル期間の最終盤でようやくインフレ率は上昇し始めて、中央銀行のインフレ目標である年率平均2%を超えてきている。ここでは将来的に年率平均2%のインフレ率が安定的に続いた場合のシミュレーション結果も併記する。

取り崩しにおいても資産額の中央値に関するGBMとAESの差は小さい。他方で、取り崩し率が高く期間が長いほど、想定するインフレの平均水準（実績の平均0.55%とインフレ目標の2%）の違いは中央値にも徐々に反映される。

図表10は、2つのモデルにおける枯渇確率の比較結果を示している。資産が枯渇する確率は取り崩しをする退職者にとって最も関心のある数値である。通常のリスク回避的な退職者であれば自身が想定する取り崩し期間に対して枯渇確率を小さく保つことのできる取り崩し率を選択するのが自然である。よって、小さな枯渇率を達成できるような取り崩し期間と取り崩し率の組み合わせの場合の評価はより重要である。図表10でみられるように5%以下の小さい枯渇確率（表中のグレーの部分）においてGBMモデルはAESモデルよりも枯渇確率を過小評価している（太字部分：インフレ率2%、米国株50年運用、取り崩し率1%の場合を除く）。

これは、図表2や図表8でみられる株式指数

図表10 取り崩しの枯渇確率

取崩年数	年率1%取崩		年率2%取崩		年率3%取崩		年率4%取崩		年率5%取崩		年率6%取崩		年率7%取崩		年率8%取崩	
	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM	AES	GBM
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.06	0.00	0.44	0.10	1.20	0.52	2.74	1.84	5.02	4.30
20	0.00	0.00	0.16	0.02	1.36	0.66	3.58	3.08	8.10	7.42	14.20	15.20	23.58	25.74	34.62	37.36
30	0.04	0.00	0.84	0.44	3.56	2.76	8.80	8.36	16.40	17.26	26.62	29.08	38.76	41.46	50.48	54.06
40	0.12	0.02	1.52	1.20	5.70	5.00	12.34	12.48	22.00	23.02	33.40	36.30	45.34	48.82	57.24	60.20
50	0.16	0.04	2.06	1.78	6.82	6.62	14.50	14.98	24.82	26.44	36.64	39.46	48.78	52.40	60.74	63.52
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.04	0.30	0.14	1.22	0.84	2.52	2.10
20	0.00	0.00	0.00	0.02	0.22	0.06	1.02	0.84	3.14	2.88	6.42	6.50	11.64	12.12	18.72	19.78
30	0.00	0.00	0.06	0.06	0.78	0.54	2.96	2.38	6.20	6.56	11.68	12.12	19.02	20.10	28.02	29.88
40	0.02	0.00	0.14	0.10	1.08	0.88	3.82	3.56	8.06	8.12	14.22	14.88	22.54	23.44	32.36	34.42
50	0.02	0.00	0.20	0.16	1.42	1.06	4.42	4.20	8.90	9.06	15.50	16.38	24.32	25.32	34.00	36.06
10	0.00	0.00	0.08	0.00	0.22	0.14	0.92	0.52	2.48	1.98	5.86	5.98	11.68	13.18	20.08	22.70
20	0.28	0.08	3.44	2.92	11.88	12.78	25.70	28.12	41.44	45.26	57.94	60.72	71.74	72.42	82.54	82.06
30	2.66	2.24	15.38	16.80	34.88	37.32	54.60	57.42	70.82	72.16	82.26	81.98	90.08	89.16	94.64	93.56
40	7.80	7.86	28.92	31.34	52.30	55.50	70.52	71.88	82.82	82.98	90.40	89.86	95.28	94.04	97.78	96.78
50	14.06	14.76	40.32	42.94	63.38	65.34	78.72	79.84	88.46	88.20	94.12	93.36	97.14	96.34	98.66	97.98
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.20	0.00	0.76	0.28	1.82	1.10	3.72	2.92	7.36	6.70
20	0.00	0.00	0.44	0.14	2.16	1.60	5.94	5.28	12.30	12.42	21.82	23.16	33.42	36.24	45.48	48.86
30	0.14	0.00	1.86	1.40	6.86	6.44	14.80	15.36	25.80	27.86	39.10	42.24	52.50	55.98	63.90	66.64
40	0.42	0.20	3.72	3.14	10.64	10.76	21.14	22.38	34.42	37.04	47.78	51.52	60.98	63.52	72.14	74.06
50	0.66	0.48	5.18	4.40	13.38	13.62	25.28	27.42	39.26	42.02	52.64	56.40	65.60	67.68	76.12	76.88
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.14	0.08	0.66	0.36	2.00	1.40	3.50	3.12
20	0.00	0.00	0.06	0.02	0.50	0.26	2.28	1.84	5.34	5.12	10.42	10.72	17.80	18.76	26.50	28.66
30	0.02	0.00	0.20	0.16	1.78	1.52	5.24	5.54	11.14	11.32	18.96	19.78	28.80	30.92	40.40	42.76
40	0.02	0.02	0.50	0.36	2.94	2.66	7.24	7.62	14.12	15.04	23.60	24.76	34.82	36.72	46.16	48.44
50	0.02	0.04	0.68	0.52	3.54	3.24	8.46	8.72	15.98	16.98	25.72	27.44	37.30	39.18	48.70	50.70
10	0.00	0.00	0.14	0.02	0.30	0.18	1.36	0.88	3.70	3.30	8.70	9.18	16.26	18.20	26.26	30.12
20	0.54	0.18	5.74	5.44	18.90	20.76	35.84	38.74	54.10	57.28	69.94	71.12	82.08	81.68	89.92	88.60
30	5.44	5.10	24.88	27.12	49.74	52.40	69.30	70.74	82.30	82.26	90.86	89.98	95.76	94.48	98.14	97.06
40	15.28	16.30	45.16	47.94	68.66	70.52	83.40	83.78	91.76	91.12	96.36	95.26	98.40	97.68	99.42	98.68
50	27.12	29.00	60.02	61.78	79.42	80.50	90.36	89.80	95.82	94.86	98.02	97.36	99.34	98.64	99.74	99.34

(出所) 著者作成。

収益率の左裾の厚さとインフレ率の右裾の厚さという二つの要因が重なることで生じており、積立の元本割れ確率の場合よりも影響は深刻になりうる。すなわち、GBM モデルは株式指数の左裾のテイルリスク（株価下落リスク）および CPI の右裾のテイルリスク（物価上昇リスク）をいずれも AES モデルに比べて過小評価する傾向がある。こうした二つのテイルリスクが同時に生じうる局面では、取り崩しの安全性に与える影響を慎重に考える必要がある。

とはいえ、図表10の確率値を見ると、積立の場合と同様、テイルリスクの過小評価が重なり得る局面でも、もともとの確率水準が小さいため、両モデル間の差は限定的である。例えば、本来 5% 程度の確率で起こる事象の確率をほぼ 0% と評価してしまえば、個人投資家の意思決定に影響を及ぼしうるが、図表10でみられる過小評価の程度は、5%に満たない水準では両モデル間で1%ポイント未満の差にとどまっている。つまり、2モデル間でほぼ確実に過小評価はあるが、その差は小さく安定していることで、簡易的にGBM モデルを用いるとしても、テイルリスクをやや過小評価していることに注意している限り実用上の問題はないと結論付けたい。

7. おわりに

本稿では資産価格モデルの精緻化が新 NISA で想定される長期インデックス投資のシミュレーション結果に与える影響を調べた。具体的には、幾何ブラウン運動の仮定を緩め、精緻化モデルとして AES モデルを採用し、両者を比較した。AES モデルは収益率分布の非対称性と裾の厚さを表現できる。これらの収益率分布

の特徴は株価をはじめとする金融時系列データの実証分析でよく知られているものであり、幾何ブラウン運動モデルでは捉え切れない特徴である。

AES モデルの推定結果によると 3 種類の株式指数の月次収益率のボラティリティには持続性や非対称性が観測された。これは株価が下落するときは大きなボラティリティを伴うことを意味する。また日本のインフレ率分布にも株式指数とは逆方向の非対称性がみられ、物価に関しては上昇時の方がその変動率が激しいことがわかった。これらの推定された AES モデルを用いたシミュレーションによる月次収益率分布には分布の非対称性や裾の厚さなどの過去のデータで得られた特徴を再現しており、単純な幾何ブラウン運動モデルの月次収益率分布である正規分布とは明確な違いがあった。

さらに、これらのシミュレーション系列を使って積立と取り崩しの成功率を計算し 2 つのモデル間の差異を示した。積立の元本割れ確率、取り崩しの資金枯渇確率ともにテイルリスク、すなわち、稀に起こる小さな確率を GBM モデルではほぼ確実に過小評価することがわかった。これは上述の通り、現実データのファットテイルや非対称性を無視しているからである。

厳密なリスク評価を目的とするならば、モデルを精緻化して、より正確に分布の裾の確率を評価する必要がある。しかし、本稿では上述のシミュレーション結果を鑑みて、新 NISA で想定されているような個人が資産運用に際しての目安を得たいという目的ならば、モデルの精緻化による差異は意思決定に影響を与える程ではないと結論付けた。よって、積立や取り崩しのシミュレーションを行う際に簡便な GBM モデルを用いることは、ややリスクを過小評価して

いるという事実を念頭におく限り大きな問題にはならないと考える。

謝辞

本稿の作成にあたり、村松郁夫（滋賀大学）、菊池健太郎（滋賀大学）、岩橋培樹（琉球大学）の各氏ならびに匿名の査読者から有益なご指摘を頂いた。記して感謝する。残る誤りはすべて筆者らに属する。

参 考 文 献

- Bengen, W. P. (1994). Determining withdrawal rates using historical data. *Journal of Financial Planning*, 7(4), pp.171–180.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Cooley, P. L., Hubbard, C. M., & Walz, D. T. (1998). Retirement savings: Choosing a withdrawal rate that is sustainable. *AII Journal*, 20(2), 16–21.
- (2003). A Comparative Analysis Of Retirement Portfolio Success Rate ; Simulation Versus Overlapping periods,” *Financial Services Review*, 12(2), 115.
- (2011). Portfolio success rates: Where to draw the line. *Journal of Financial Planning*, 24(4), 48–60.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50(4), 987–1007.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Fernandez, C. and Steel, M. F. J. (1998), On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness. *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 359–371.
- Finke, M. S., Pfau, W. D., & Blanchett, D. (2013). The 4 percent rule is not safe in a low-yield world. *Journal of Financial Planning*, 26(6), 46.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Guyton, J. T., & Klinger, W. J. (2006). Decision rules and maximum initial withdrawal rates. *Journal of Financial Planning*, 19(3), 48.
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 705–730.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- Nelson, D. B. (1991), “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59(2), 347–370.
- Pfau, W. D. (2010). An international perspective on safe withdrawal rates from retirement savings: The demise of the 4 percent rule? *Journal of Financial Planning*, 23(2), 52–61.
- Tamimi, N., Sebastianelli, R., Rajan, M., & Rocco, V. (2024). Revisiting the 4% Withdrawal Rule Using Monte Carlo Simulations with Random Market Declines. *Financial Planning Research Journal*, 10(1).

（滋賀大学経済学部・准教授 金谷太郎）
（滋賀大学大学院経済学研究科・博士後期課程 吉田陽一）