# ダークプールの経済理論

佐　藤　祐　己

要　旨

本稿では，ダークプールについてのシンプルな理論モデルの構築を試みる。モデルでは，二人の情報投資家が，リット市場とダークプールのいずれかを選択する。リット市場にはマーケットメーカーが常駐するため売買不成立のリスクはないが，マーケットインパクトとフロントランニングのリスクがある。他方ダークプールでは，マーケットインパクトはないが，投資家同士が協調しなければ売買自体が不成立になるリスクがある。分析の結果，フロントランニングのリスクが小さい場合，リット市場だけが利用される「均衡１」が唯一の均衡になる。しかし，フロントランニングのリスクが高い場合，均衡１に加えて，両プラットフォームが共存する「均衡２」と，ダークプールだけが利用される「均衡３」も，複数均衡として出現する。三つの均衡のうちどれが実現するかは，投資家たちの自己実現的期待に依存する。三つの均衡はパレート順位付けができ，経済厚生が最も高いのは均衡３，次に均衡２，最も低いのは均衡１である。すなわち，リット市場のみが利用される均衡は，経済厚生が低いにもかかわらず，投資家間の「協調の失敗」の結果として実現しうるのである。ダークプールの存在は，リット市場の価格形成に影響を与える。情報投資家が有する私的情報がダークプール内に留まる可能性があるため，リット市場における価格の情報反映度とボラティリティはともに小さくなる。

キーワード：ダークプール，リット市場，価格の情報反映度，経済厚生，自己実現的期待

目　次

1．はじめに
2．モデル
3. 均衡分析
　3.1　リット市場における価格
　3.2　投資家の選択
　　3.2.1　リット市場とダークプールでの期待利得

3.2.2　投資家の選択：リット市場かダークプールか
3.3　均衡
4．経済学的含意
4.1　厚生分析
4.2　リット市場における価格の情報反映度
5．おわりに

## 1．はじめに

近年，証券市場における「ダークプール」のシェアが拡大している。ダークプールとは，証券会社が顧客から受けた売買注文を取引所に回送せずに，顧客注文同士でつけあわせて約定させる仕組みであり，その最大の特徴は，価格情報が公表されないという点である（大墳，2017）。日本取引所グループによると，わが国におけるダークプールのシェアは近年右肩上がりで，2024年６月時点で，東証全体の売買代金の4.86% を占めている[1]。米国ではこの傾向はさらに顕著であり，2016年時点でのダークプールのシェアは13.7% にのぼるとの推計もある（大墳，2016）。本稿では，標準的な応用ミクロ経済学の金融理論をもとに，ダークプールについてのシンプルな理論フレームワークを構築することを試みる。

一期間のモデルを考える。リスク中立的な二人の投資家と一人のマーケットメーカーが，一つのリスク資産を取引する。投資家二人は，ともに資産の真の価値を事前に知る「情報投資家」（informed investors）だが，マーケットメーカーはその価値を知らない。各投資家は，確率的にディーラーかブローカーのいずれかになる。ディーラーは自己勘定で資産を売買し，取引利潤を最大化する。他方，ブローカーの業務は委託売買であり，外生的に訪れる顧客からの取引注文を約定させることで手数料を得る。資産の取引プラットフォームとして，リット市場とダークプールの二種類が存在する。前者ではマーケットメーカーが競争的に価格を設定し注文を受けるが，後者では所与の価格のもとで投資家二人が相対取引を行う。期初に，各投資家はどちらのプラットフォームを利用するかを選択する。投資家たちは互いの選択を観察することはできない。プラットフォームを選択するにあたり，投資家はそれぞれを利用するメリットとデメリットを比較考量する[2]。リット市場のメリットは，マーケットメーカーが常駐するため売買不成立の心配がないことであり，デメリットはマーケットインパクト（投資家がもつ資産価値についての私的情報が価格に織り込まれる）があることである。加えて，リット市場では，フロントランニング（注文情報を HFT に察知され先んじて同方向の注文を出される）のリスクもあると仮定する[3]。他方，ダークプールの投

1　日本取引所グループ「ダークプールにおける売買代金の推移（～2024年６月）」（https://www.jpx.co.jp/news/1030/20240717-01.html）

2　現実の市場で投資家がダークプールを利用するメリットとデメリットは複数ずつあり，たとえば清水（2013）や大墳（2017）に整理されている。

3　現実のフロントランニングは，ダークプールからリット市場に回送された注文が事前に察知されることで起こることが多いといわれている。すなわち，リット市場だけの問題ではなく，ダークプールとリット市場が両方存在することで起こる現象ということである。しかし，本稿ではモデル設定の複雑化を避けるために，リット市場における問題として仮定する。

資家にとってのメリットは，取引価格が所与のためマーケットインパクトがないことである。デメリットは，売り手と買い手が揃わずに売買が不成立になるリスクがあることである。モデルの均衡をもとに，(i)それぞれのプラットフォームが利用される条件，(ii)ダークプールの経済厚生への影響，そして(iii)ダークプールの存在がリット市場の価格に与える影響を分析する。

本モデルには，投資家が二人ともリット市場に集まる純粋戦略ナッシュ均衡（「均衡１」と呼ぶ）は常に存在する。ダークプールでは，投資家が 二人揃わなければ取引が成立しえないため，彼らの協調（coordination）が必要である。そのため，仮に一方の投資家がリット市場に行くとすれば，もう一方の投資家もリット市場に行かざるをえない。ゆえに，二人ともリット市場を選ぶことは常にナッシュ均衡なのである。リット市場でのフロントランニングのリスクが小さい場合は，これが唯一均衡になる。仮に一方の投資家がダークプールに行くとき，もう一方の投資家にとっては，そこから逸脱（deviate）してリット市場で私的情報のアドバンテージを独占しながらマーケットメーカーと取り引きする方が得になるため，ダークプールでの協調が成立しないためである。しかし，フロントランニングのリスクが大きくなると，均衡１に加えて，二人とも確率的にリット市場とダークプールのどちらかに行く混合戦略均衡（「均衡２」と呼ぶ）と，二人ともダークプールに行く純粋戦略均衡（「均衡３」と呼ぶ）が出現し，あわせて三つの複数均衡が存在することになる。仮に一方の投資家がダークプールに行くと，もう一方の投資家にはあえてフロントランニングのリスクの高いリット市場に逸脱するインセンティブはなく，ダークプールで協調することが合理的になるため，均衡３が成立するのである。三つのうちどの均衡が実現するかは，投資家たちの自己実現的な期待（self-fulfilling beliefs）に依存する。どの均衡が「実現しやすい」かについては，本稿のモデル設定の範囲内では特定できない。

これら三つの均衡は，経済主体の期待利潤についてパレート順位付けすることができる（Pareto-ranked）。マーケットメーカーはいずれにおいても期待利潤が０で不変のため，実質的には二人の投資家の期待利潤を比較することになる。彼らの期待利潤が最も高いのは均衡３，次に均衡２，最も低いのは均衡１である。投資家二人が確実にダークプールに集まるのであれば，売買不成立になるリスクはそれほど大きくない（買いと売りが揃わずに不成立になるリスクは残るが）。一方で，ダークプールではマーケットインパクトがないため，売買成立時の利得は大きい。これらを勘案すると，ダークプールでの純粋戦略均衡（均衡３）が最も高い期待利得をもたらすのである。他方，リット市場での純粋戦略均衡（均衡１）では，情報投資家の注文が集中するためマーケットインパクトが大きく，さらにフロントランニングのリスクもあるため，マーケットメーカーの存在による約定の確実性というプラス面を考慮に入れてもなお，期待利潤は均衡３を下回るのである。パレート順位付けができるため，本モデルの枠組み内では均衡３が社会的に「最適」だが，均衡１と２もやはり実現しうる。リット市場での厚生が比較的低いと分かっていても，仮に自分とは別の投資家が確実にリット市場に行くのであれば，自分も同様にするのが合理的であり，相手も同様に考える。つまり，投資家間の協調の失敗（coordination failure）の結果として，リッ

ト市場のみが使われる状態も均衡として成立するのである。

ダークプールの存在は，リット市場における価格形成に影響を与える。リット市場のみが使用される均衡１では，情報投資家がもつ私的情報が価格に織り込まれるため，価格は平均的に真の資産価値に近づく。しかし，情報投資家からの買い・売りに応じてマーケットメーカーが価格を大きく上下させるため，価格のボラティリティは大きい。対して，リット市場とダークプールが共存する均衡２では，情報投資家が有する私的情報がダークプール内に留まる可能性があるため，リット市場の価格は真の資産価値を均衡１ほどは反映しない。また，マーケットインパクトが小さいため，価格のボラティリティは小さくなる。

本稿は，ダークプールを含む取引所外取引を理論的に分析した先行研究に関連している。標準的な金融経済学を基礎にした理論モデルとしては，たとえばButi et al.（2017），Zhu（2014），Ye（2024）がある。これらの研究は，ダークプールとリット市場との相互連関を論じ，ダークプールがリット市場の価格形成に与える影響を分析している点は，本稿と同様である。これらと本稿との違いは，本稿では複数均衡が出現し，リット市場が投資家たちの協調の失敗として使用される可能性を示したことである。また，これらのモデルに比べ，本稿のモデル設定は格段にシンプルである点も重要である。本稿では，標準的なマーケットマイクロストラクチャーの枠組みであるGlosten and Milgrom（1985）やKyle（1985）のエッセンスを取り入れつつ，それらを更に単純化することにより，さまざまな拡張に比較的容易に対応しうる理論フレームワークを提供している。

ダークプールに関する実証研究も，近年では活発に報告されている。Comerton-Forde and Putnins（2015）は，ダークプールにおける非ブロック取引（non-block dark trades）が価格発見機能を阻害し，価格の情報効率性を低下させることを報告している。この結果は，本稿4.2節の分析結果と整合的である。Brogaard and Pan（2021）は，ダークプールでの取引増加により，投資家の情報獲得（information acquisition）が増加することを報告している。すなわち，本稿のモデルでは外生的に仮定している情報投資家の割合が，ダークプールの有無によって内生的に変化する可能性が示唆されている。またGresse（2017）は，リット市場やダークプールを含む複数の取引プラットフォームに取引が分散されても，流動性が影響を受けることはないことを報告している。

## 2．モデル

リスク資産が一つ取引される，一期間モデルを考える。資産は期初に内生的な価格$P$で一度だけ取引され，期末に外生的なキャッシュフロー$v\in\{0,1\}$を生む。ここで，$\Pr[v=1]=\frac{1}{2}$とする。経済主体は，リスク中立的な二人の投資家と，リスク中立的な一人のマーケットメーカーである。二人の投資家は期初にすでに$v$の値を知っているが，マーケットメーカーはその値を知らない。資産の取引プラットフォームとして，リット市場とダークプールの二つがある。各投資家は，期初にまずどちらのプラットフォームに行くかを選択する。その選択は，当該投資家の私的情報である。その後，各投資家は，それぞれ独立に，確率$\mu\in[0,1]$でディーラーに，確率$(1-\mu)$でブローカーになり，資産

を売買する。自らがディーラーかブローカーかは私的情報である。資産の売買は，1単位のマーケットオーダーによってのみ可能と仮定する。ディーラーは，自己勘定で取引する投資家である。そのため，ディーラーの期末における利得は，買い注文を出して約定した場合は $v-P$，売り注文を出して約定した場合は $P-v$ である。売買不成立ならば，買い・売りに関わらず利得は0となる。他方，ブローカーは委託売買業務に従事する。つまり，自らが知る $v$ の値とは無関係に，顧客が買い注文を入れれば買い注文を，売り注文を入れれば売り注文を出す必要がある。単純化のため，顧客の行動は明示的にはモデル化せず，確率 $\frac{1}{2}$ で買い注文，確率 $\frac{1}{2}$ で売り注文を出さなくてはならない（顧客の依頼を遂行するだけ）と仮定する。依頼された注文を約定させれば，$P$ や $v$ とは無関係に，期末に定額の手数料 $\phi>0$ を得る。約定しなければ，利得は0である。

リット市場では，常駐するマーケットメーカーが，競争的な価格 $P$ を提示して投資家の取引相手になる。投資家が買い注文を出せばマーケットメーカーが（自らの在庫から）資産を投資家に売り，投資家が売り注文を出せばマーケットメーカーが資産を投資家から買い入れる。そして，それらの取引を行うことが自らにとって合理的になるような価格 $P$ を，マーケットメーカーが設定するのである。投資家にとっては，リット市場に行けば必ずマーケットメーカーが取引の相手方になるので，売買が不成立になるリスクはない。しかし，マーケットメーカーは投資家からの買い・売り注文の数を観察することにより $v$ についてのディーラーの私的情報を推定し，それを $P$ に織り込むので，ディーラーの取引利潤が減少する可能性がある（すなわち，マーケットインパクトがある）[4]。

さらに，リット市場では投資家がHFTによるフロントランニングの被害を受ける可能性があると仮定する。単純化のため，HFTを経済主体として明示的にモデル化することはせず，フロントランニングは外生的なショックとして扱う。具体的には，$v$ の値を知るディーラーが注文を出すとき，確率 $\theta\in[0,1]$ でフロントランニングの標的になり，$f\geq 2$ 単位の同方向の注文が（モデル外の主体から）同時に入ると仮定する。つまり，ディーラーが買い注文を出す場合は $f$ 単位の買い注文が追加的に出され，ディーラーが売り注文を出す場合は $f$ 単位の売り注文が追加的に出される。後にみるように，買いのフロントランニングが発生すれば，マーケットメーカーは $v=1$ と完全に知ることになるので価格 $P=1$ をつけ，その結果ディーラーの取引利潤は0になってしまう。同様に，売りのフロントランニングが発生すれば，$v=0$ と知ったマーケットメーカーは $P=0$ をつけるため，ディーラーの取引利潤は0になる[5]。

他方，ダークプールでは，投資家が2人ともダークプールに来て，かつ買い注文と売り注文

4　たとえば，投資家から買い注文が多く入れば，資産の真の価値が高い（$v=1$）と知った上でディーラーが買いを入れている確率が高いと判断できるため，マーケットメーカーは高い価格 $P$ を提示する。しかし，その高い $P$ が，買い注文を入れる（すなわち，安く買い高く売ることを望む）ディーラーの取引利潤にはマイナスに作用するのである。

5　$f\geq 2$ という仮定は，分析を単純化するためである。仮に $f=1$ とすると，例えばリット市場における買い注文と売り注文の数がそれぞれ2と0のとき，その買い注文がディーラーとフロントランナーによるものなのか，それともディーラーとブローカーによるものなのかがマーケットメーカーには判別できないため，分析がやや複雑化する。$f\geq 2$ であれば，フロントランニングが発生しているのは注文数が3以上のとき（そしてそのときのみ）なので，マーケットメーカーはその発生を確実に判別でき，分析が容易になる。

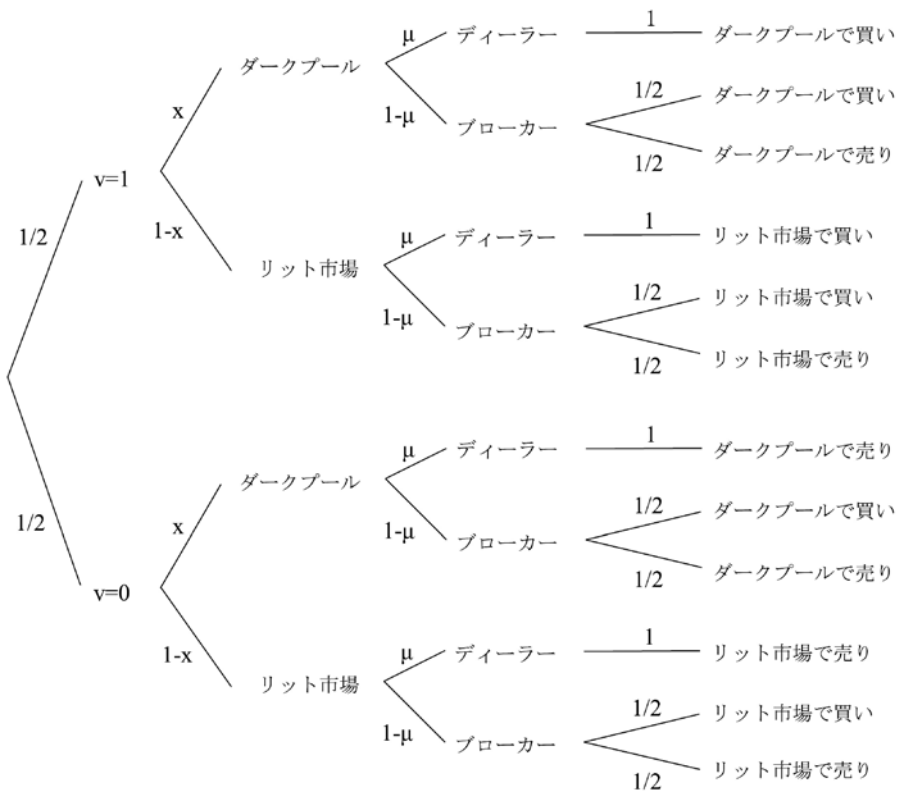
が揃ったときにのみ，売買が成立する。ダークプールでの取引価格は，$P=\frac{1}{2}$と仮定する。この仮定は，現実のダークプールにおける取引価格は，公開された取引所における仲値（AskとBid の中間値）を参照することが多いという事実に起因する。本モデルでは，ダークプールで取引が起こるときには，リット市場には投資家がいないので，マーケットメーカーがリット市場でつける価格は事前期待値（prior）に等しく，$P=\mathrm{E}[v]=\frac{1}{2}$である。それを参照して，ダークプールでの価格も$\frac{1}{2}$になるという解釈である[6]。

## 3．均衡分析

本節では，二人の投資家が同じ戦略を選択する対称均衡（symmetric equilibria）を探す。投資家が選択する混合戦略（mixed strategy）における，ダークプールに行く確率を$x\in[0,1]$で表す。$x$の値は，以下の分析により内生的に決定される。均衡における$x$を，$x^*$で表す。

後に確認されるように，均衡において，リット市場での価格$P$は0と1の間で決まる。ダークプールでの価格$P=\frac{1}{2}$も，当然0と1の間

図表1　売買注文のパターン




6　ダークプールにおける価格が$P=\frac{1}{2}$になることを，二人の投資家による交渉の解として内生的に導出することも可能である。買い手はできるだけ安く（0の近くで）買うことを望み，売り手はできるだけ高く（1の近くで）売ることを望む。ブローカーの利得を，定数$\phi$ではなく価格$P$に依存するようにやや設定を変更し，二人の投資家の交渉力（bargaining power）を同等と仮定すれば，ナッシュ交渉解としての取引価格が$P=\frac{1}{2}$となることを示せる。

である。そのため，ディーラーにとっては，リット市場であれダークプールであれ，$v=1$ならば必ず買い注文を，$v=0$ならば必ず売り注文を出すことが最適になる。そのため，両取引プラットフォームにおいてありうる売買注文のパターンは，図表1のようにまとめることができる。

### 3.1　リット市場における価格

期初に投資家たちからリット市場のマーケットメーカーに出される買い注文の数を$B$，売り注文の数を$S$で表す。マーケットメーカー自身の取引は$B$と$S$には含まれない。たとえば，ある投資家から買い注文が一つ入れば$(B=1)$，マーケットメーカーはその投資家に1単位の資産を売り，投資家たちから売り注文が二つ入れば$(S=2)$，マーケットメーカーはその投資家たちから2単位の資産を買うということである。仮にフロントランニングがないとすれば，ありうる$(B, S)$のパターンは以下の6つである。

- ケース1：$(B, S)=(0, 0)$
- ケース2：$(B, S)=(1, 0)$
- ケース3：$(B, S)=(0, 1)$
- ケース4：$(B, S)=(1, 1)$
- ケース5：$(B, S)=(2, 0)$
- ケース6：$(B, S)=(0, 2)$

競争的なマーケットメーカーは，$x^*$を所与として，自らの期待利潤が0になるような価格，すなわち$P=\mathrm{E}[v|(B,S)]$を設定する[7]。図表1を参照すると，ケース1から6に対応する$P$を計算することができる。例えば，ケース1の価格は，$P_1=\mathrm{E}[v|(0,0)]=1\cdot\Pr[v=1|(0,0)]+0\cdot\Pr[v=0|(0,0)]=\Pr[v=1|(0,0)]$だが，これにベイズの定理を適用すれば，以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\Pr[(0,0)|v=1]\Pr[v=1]}{\Pr[(0,0)|v=1]\Pr[v=1]+\Pr[(0,0)|v=0]\Pr[v=0]} \\
&= \frac{x^{*2}\frac{1}{2}}{x^{*2}\frac{1}{2}+x^{*2}\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

7　たとえば，投資家から買い注文が一つだけ入るとする。つまり$(B,S)=(1,0)$である。このとき，マーケットメーカーは投資家から価格$P$を受け取るかわりに資産1単位を手放す（売る）ので，マーケットメーカーの利潤は$\pi=P-v$である。よって，$(B,S)=(1,0)$という事実を考慮に入れた期待利潤（条件付き期待値）は，$\mathrm{E}[\pi|(1,0)]=P-\mathrm{E}[v|(1,0)]$である。マーケットメーカーは競争的であるため，可能なかぎり低い価格，すなわち自らの期待利潤が0になるような価格$P$を投資家に提示するため，$\mathrm{E}[\pi|(1,0)]=0\Longleftrightarrow P=\mathrm{E}[v|(1,0)]$となる。売り注文のケースも同様に考えることができる。たとえば，投資家たちから売り注文が二つ入るとする（$(B,S)=(0,2)$）。マーケットメーカーは投資家たちから2単位の資産を受け取るかわりに価格$P$の2単位分を支払うので，マーケットメーカーの利潤は$\pi=2(v-P)$である。よって，期待利潤は$\mathrm{E}[\pi|(0,2)]=2(\mathrm{E}[v|(0,2)]-P)$である。競争的なマーケットメーカーは可能なかぎり高い価格，すなわち自らの期待利潤が0になるような価格$P$を投資家に提示するため，$\mathrm{E}[\pi|(0,2)]=0\Longleftrightarrow P=\mathrm{E}[v|(0,2)]$となる。

同様の方法で，ケース２から６の価格も以下のように求められる。

$$P_2 = \frac{\Pr[(1,0)|v=1]\Pr[v=1]}{\Pr[(1,0)|v=1]\Pr[v=1]+\Pr[(1,0)|v=0]\Pr[v=0]}$$

$$= \frac{2x^*(1-x^*)\left(\mu+\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{1}{2}}{2x^*(1-x^*)\left(\mu+\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{1}{2}+2x^*(1-x^*)\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1+\mu}{2}. \tag{2}$$

$$P_3 = \frac{\Pr[(0,1)|v=1]\Pr[v=1]}{\Pr[(0,1)|v=1]\Pr[v=1]+\Pr[(0,1)|v=0]\Pr[v=0]}$$

$$= \frac{2x^*(1-x^*)\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{2}}{2x^*(1-x^*)\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{2}+2x^*(1-x^*)\left(\mu+\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1-\mu}{2}. \tag{3}$$

$$P_4 = \frac{\Pr[(1,1)|v=1]\Pr[v=1]}{\Pr[(1,1)|v=1]\Pr[v=1]+\Pr[(1,1)|v=0]\Pr[v=0]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-x^*)^2(1-\mu^2)}{\frac{1}{2}(1-x^*)^2(1-\mu^2)+\frac{1}{2}(1-x^*)^2(1-\mu^2)}$$

$$= \frac{1}{2}. \tag{4}$$

$$P_5 = \frac{\Pr[(2,0)|v=1]\Pr[v=1]}{\Pr[(2,0)|v=1]\Pr[v=1]+\Pr[(2,0)|v=0]\Pr[v=0]}$$

$$= \frac{(1-x^*)^2\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2\frac{1}{2}}{(1-x^*)^2\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2\frac{1}{2}+(1-x^*)^2\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(1+\mu)^2}{2(1+\mu^2)}. \tag{5}$$

$$P_6 = \frac{\Pr[(0,2)|v=1]\Pr[v=1]}{\Pr[(0,2)|v=1]\Pr[v=1]+\Pr[(0,2)|v=0]\Pr[v=0]}$$

$$= \frac{(1-x^*)^2\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2\frac{1}{2}}{(1-x^*)^2\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2\frac{1}{2}+(1-x^*)^2\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(1-\mu)^2}{2(1+\mu^2)}. \qquad (6)$$

### 3.2　投資家の選択

ディーラーは，$v=1$ならば買い注文を出し，$v=0$ ならば売り注文を出すことが最適である。ブローカーは，買い注文か売り注文かが外生的に決定される。つまり，投資家の買い・売り注文についての選択は自明であり，分析は不要である。以下では，注文を出す前の，リット市場に行くかダークプールに行くかについての選択を分析する。

#### 3.2.1　リット市場とダークプールでの期待利得

仮に投資家がリット市場に行く場合には，期待利得はいくらであろうか。同様に，仮に投資家がダークプールに行く場合には，期待利得はいくらであろうか。具体的な導出過程は巻末の Appendix に記すが，リット市場に行く投資家が得る期待利得は

$$\Pi^{\text{lit}}(x^*) = (1-\mu)\left(\frac{(1-\phi)\mu(1+x^*\mu^2)}{2(1+\mu^2)}+\phi\right), \qquad (7)$$

ダークプールに行く投資家が得る期待利得は

$$\Pi^{\text{dark}}(x^*) = \frac{(1-\mu)x^*}{2}\left(\frac{\mu}{2}+\phi\right) \qquad (8)$$

と計算することができる。

#### 3.2.2　投資家の選択：リット市場かダークプールか

各投資家は，均衡の$x^*$を所与として，$x\in[0,1]$を自由に選択する。$x^*$ を所与とするということは，$\Pi^{\text{lit}}(x^*)$ と $\Pi^{\text{dark}}(x^*)$ の値を所与とするということである。すなわち，$\Pi^{\text{lit}}(x^*)$ と $\Pi^{\text{dark}}(x^*)$ の中にある $x^*$ は，各投資家が選択する $x$ ではなく，その投資家とは別の投資家が選択している（と当該の投資家が信じている）$x$ の値，もしくはマーケットメーカーが信じている $x$ の値であるから，そもそも投資家が選択できるものではないことには注意が必要である。

期初の投資家の問題は，以下の通りである。

$$\max_{x\in[0,1]} \; x\Pi^{\text{dark}}(x^*)+(1-x)\Pi^{\text{lit}}(x^*). \qquad (9)$$

$x^*$ を所与とすれば (9) は $x$ について線形であるから，投資家が選択する最適な $x$ は，$\Pi^{\text{dark}}(x^*)$ と $\Pi^{\text{lit}}(x^*)$ の相対的な大小に応じて，以下のように決まる。

$$x = \begin{cases} 1 & \text{if } \Pi^{\text{dark}}(x^*) > \Pi^{\text{lit}}(x^*), \\ \text{any value in } [0,1] & \text{if } \Pi^{\text{dark}}(x^*) = \Pi^{\text{lit}}(x^*), \\ 0 & \text{if } \Pi^{\text{dark}}(x^*) < \Pi^{\text{lit}}(x^*). \end{cases} \tag{10}$$

(10) は，(7) と (8) を使うと，以下のように書き直せる。

$$x = \begin{cases} 1 & \text{if } x^* > \hat{x}, \\ \text{any value in } [0,1] & \text{if } x^* = \hat{x}, \\ 0 & \text{if } x^* < \hat{x}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\text{where} \quad \hat{x} \equiv \frac{\dfrac{(1-\theta)\mu}{1+\mu^2} + 2\phi}{\dfrac{\mu}{2} + \phi - \dfrac{(1-\theta)\mu^3}{1+\mu^2}} > 0. \tag{12}$$

(12) から，フロントランニングの確率 $\theta$ が高まれば，$\hat{x}$ の水準が下がることが確認できる ($\mathrm{d}\hat{x}/\mathrm{d}\theta < 0$)[8]。この事実は，後に均衡決定においてフロントランニングが果たす役割を考察する際に重要になる。

### 3.3 均衡

均衡においては，各投資家が自ら選択する $x$ が，その均衡値 $x^*$ に一致する必要がある。つまり，各投資家が選択する $x$ は次式を満たさなければならない。

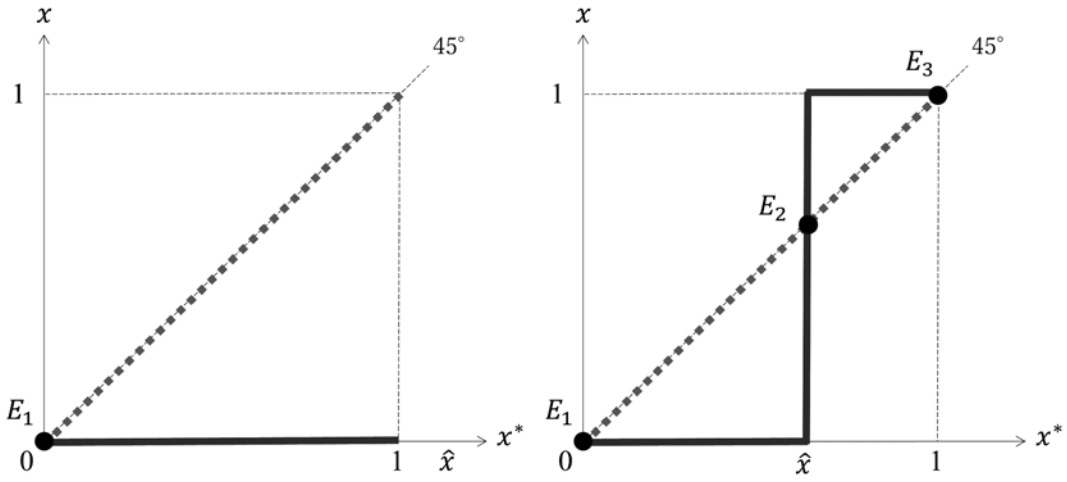
$$x = x^*. \tag{13}$$

均衡の $x^*$ は，(11) と (13) を同時に満たすような $x^*$ である。図表２は，均衡の決定を図解したものである。太い実線は，$x^*$ を所与とした各投資家による最適な $x$ の選択（(11)式）を表し，太い点線は，均衡条件 (13) を表す。これらの交点で，$x^*$ が決定される。

図表２のパネル(a)は，$\theta$ が小さいケースである。$\hat{x} > 1$ なので，点 $E_1$ が唯一の均衡点で，$x^* = 0$ である。この均衡は，投資家が二人ともリット市場のみを利用する，純粋戦略ナッシュ均衡である。パネル(b)は，$\theta$ が大きいケースである。$\hat{x} < 1$ なので，点 $E_1, E_2, E_3$ に対応した三つの均衡が存在する。それらを，それぞれ均衡１，均衡２，均衡３と呼ぶことにする。均衡１は，パネル(a)のものと同じである。均衡２では，$x^* = \hat{x}$ である。すなわち，各投資家が確率 $\hat{x}$ でダークプールを利用し，確率 $(1-\hat{x})$ でリット市場を利用する，混合戦略ナッシュ均衡

8　さらに，$\lim_{\theta \to 0} \hat{x} > 1$ ということと，$\phi < \frac{\mu}{2}$ ならば $\lim_{\theta \to 0} \hat{x} < 1$ ということも重要である。以下の分析では，$\phi < \frac{\mu}{2}$ を仮定する。

図表２　均衡の決定




(a) $\theta$ が小さい場合: 一意的均衡　　(b) $\theta$ が大きい場合: 複数均衡

である。均衡３では，$x^*=1$ である。つまり，投資家が二人ともダークプールのみを利用する，純粋戦略ナッシュ均衡である。

$x^*=0$ となる均衡１は，常に存在する。どんなパラメータ値に対しても $\hat{x}>0$ だからである。ダークプールは，投資家が二人とも集まらないと取引が成立しないという意味で，投資家同士の協調を必要とする。そのため，仮に一方の投資家がダークプールを利用しない（$x=0$）のであれば，他方の投資家にとっても利用しないことが最適になる。つまり，二人とも $x=0$ を選択するのがナッシュ均衡になるのである。

均衡２と３は，常に存在するわけではない。それらがどのような状況下で存在するかを理解するためには，リット市場とダークプールそれぞれについて，投資家にとってのメリットとデメリットを整理することが重要である。リット市場のメリットは，マーケットメーカーが常駐するため，取引不成立の心配がないことである。リット市場のデメリットは，ディーラーの $v$ についての私的情報が価格に反映され，取引利潤が減る可能性があること（すなわち，マーケットインパクトがあること）である。このデメリットは，フロントランニングが起これば $P=v$ という極端な形で出現するが，仮にフロントランニングが起こらなくても，マーケットメーカーがディーラーの情報を価格に部分的に織り込むことによって出現はしている。他方，ダークプールのメリットは，マーケットインパクトがないため，取引利潤自体が減る可能性はないことである。ダークプールのデメリットは，買い手と売り手が揃わずに，取引自体が不成立になる可能性があることである。

図表２のパネル(a)では，リット市場におけるフロントランニングの可能性が低く（$\theta$ が小さく），上述のリット市場のデメリットが小さい。そのため，どんな $x^*$ に対しても投資家にとって相対的にリット市場が魅力的（$\Pi^{\text{dark}}<\Pi^{\text{lit}}$）であるため，リット市場のみを使う均衡が一意になる。

図表２のパネル(b)では，リット市場におけるフロントランニングの可能性が高い（$\theta$ が大きい）ため，上述のリット市場のデメリットが大きい。そのため，どんな $x^*$ に対しても $\Pi^{dark} < \Pi^{lit}$ というわけではなく，$\Pi^{dark}$ と $\Pi^{lit}$ の相対的な大小が，$x^*$ のレベルに応じて逆転する。$x^*$ が小さければ，上述のダークプールのデメリットが大きいため，やはり $\Pi^{dark} < \Pi^{lit}$ であり，投資家にとって相対的にリット市場が魅力的になる。しかし，$x^*$ が大きくなれば，ダークプールでの取引不成立の可能性は低くなり，相対的にダークプールの魅力は高くなる。そして $x^*$ が閾値の $\hat{x}$ を超えるほど大きければ，$\Pi^{dark} > \Pi^{lit}$ となり，投資家にとって相対的にダークプールが魅力的になるため，ダークプールのみが使われる均衡３も成立するのである。均衡２は，投資家にとってリット市場とダークプールが同等に魅力的（$\Pi^{dark} = \Pi^{lit}$）であるため，それら二つの間でランダムな選択をすることが最適になる，混合戦略均衡である。

パネル(b)の三つの均衡のうちどれが実現するかは，投資家たちの自己実現的な期待に依存する。彼らが何らかの理由で「均衡１が実現する」と信じれば，そう信じた彼らの行動が実際に均衡１を実現させるし，仮に「均衡３が実現する」と信じれば，そう信じた彼らの行動が実際に均衡３を実現させるのである。パネル(b)は，そのようにして実現しうる均衡が三つ存在することを示すだけであり，三つの均衡のうちどれが「実現しやすいか」ということについては，本モデルの枠組み内で分析することはできない。

# ４．経済学的含意

## 4.1　厚生分析

三つの均衡のうち，経済厚生が高いのはどれだろうか？この経済には二人の投資家とマーケットメーカーがいるが，マーケットメーカーはどの均衡においても常に期待利得が０で一定なので，実質的には二人の投資家の期待効用を均衡間で比較することで，経済全体の厚生比較が可能である。

投資家の期待効用の一般形は，$EU(x^*) \equiv x^* \Pi^{dark}(x^*) + (1-x^*)\Pi^{lit}(x^*)$ と書ける。各均衡での投資家の期待効用は，以下の通りである。

– 均衡１における期待効用：

$$EU_1 = EU(0) = \Pi^{lit}(0).$$

– 均衡２における期待効用：

$$EU_2 = EU(\hat{x}) = \hat{x}\Pi^{dark}(\hat{x}) + (1-\hat{x})\Pi^{lit}(\hat{x}).$$

– 均衡３における期待効用：

$$EU_3 = EU(1) = \Pi^{dark}(1).$$

これらの大小を比較すると，パラメータに関わらず，常に $EU_1 < EU_2 < EU_3$ である[9]。すなわち，三つの均衡はパレート順位付けされており，リット市場のみの均衡１よりもリット市場とダークプールが共存する均衡２の方が厚生は高く，それよりもダークプールのみの均衡３の方が更に厚生が高いということである。

$EU_1 < EU_2 < EU_3$ になる理由は，数学的にいえば，$d\Pi^{dark}/dx^* > 0$ かつ $d\Pi^{lit}/dx^* > 0$ だからである。つまり，ダークプールで $\Pi^{dark}$ の期待

9　証明は次の通りである。(7), (8)から $\Pi^{lit'}(\cdot) > 0$, $\Pi^{dark'}(\cdot) > 0$．よって，$EU_1 = \Pi^{lit}(0) < \Pi^{lit}(\hat{x}) = \hat{x}\Pi^{lit}(\hat{x}) + (1-\hat{x})\Pi^{dark}(\hat{x}) = EU_2 = \Pi^{dark}(\hat{x}) < \Pi^{dark}(1) = EU_3$.

効用を得るとしても，リット市場で$\Pi^{lit}$の期待効用を得るとしても，$x^*$が高い方がその期待効用は高くなる。そのため，最も高い$x^*=1$を伴う均衡３における期待効用が最も高く，最も低い$x^*=0$を伴う均衡１における期待効用が最も低くなるのである。

経済学的には，$d\Pi^{dark}/dx^*>0$の理由は以下の通りである。仮に自分（投資家）がすでにダークプールにいるとする。このとき，$x^*$が高いほど，つまりもう一人の投資家がダークプールに来る確率が高いほど，取引が成立する確率が高まるため，自分の期待効用が高まるのである。

他方，$d\Pi^{lit}/dx^*>0$の理由は以下の通りである。仮に自分（投資家）がすでにリット市場にいるとする。このとき，$x^*$が高いほど，つまりもう一人の投資家がリット市場には来ない（ダークプールに行ってしまう）確率が高いほど，自分がディーラーになり注文を出すときに同じ注文が二人でかち合ってしまう確率が下がるため，期待効用が高まるのである。自分が仮にディーラーで$v=1$と知っているとき，自分の買い注文の他にも買い注文が入ると，価格は大きく上昇し，取引利潤は減少してしまう。同様に，仮に自分がディーラーで$v=0$と知っているとき，自分の売り注文の他にも売り注文が入ると，価格は大きく低下し，やはり取引利潤は減少する。そのため，自分がディーラーになった場合には，もう一人の投資家にはリット市場には来て欲しくないのである。リット市場にはマーケットメーカーが常駐するため，自分の取引相手としてもう一人の投資家にリット市場に来てもらう必要はない。むしろ，もう一人はダークプールに行ってくれた方が，自分が（ディーラーとして）$v$についての私的情報のベネフィットを独り占めできて都合が良い[10]。ゆえに，均衡１のように投資家が二人ともリット市場に集まる場合の期待利得$EU_1$は低いのである。

複数均衡で$EU_1<EU_2<EU_3$であるから，皆がダークプールに行く均衡３のみが「最適」のようにも思える。しかし，均衡１と２もやはり実現しうる均衡である。リット市場での厚生が低いと分かっていても，仮にもう一人の投資家が確実にリット市場に行く（$x=0$）のであれば，自分も同様にするのが合理的であり，相手もまた同様に考える。つまり，いわば投資家間の「協調の失敗」の結果として，リット市場のみが使われる状態も均衡になるのである。

### 4.2　リット市場における価格の情報反映度

リット市場における価格は，ダークプールのような取引所外取引の存在によって，どのような影響を受けるのだろうか。とくに，期末に明らかになる資産の真の価値$v$が，期初においてどれだけ価格に反映されるかを表す，「価格の情報反映度」（price informativeness）への影響について分析する。

以下では$v=1$のケースを考える。このとき，本モデルの均衡で，リット市場において実現する可能性がある価格$P$は，小さい方から順に並べると次の６つである：$P\in\{P_6, P_3, \frac{1}{2}, P_2, P_5, 1\}$。ここで，$P=\frac{1}{2}$は$(B,S)=(0,0)$または$(B,S)=(1,1)$のときの価格（事前期待値$E[v]=\frac{1}{2}$に等しい）であり，$P=1$はフロントランニングが起きるときの価格である。これらの価格の確率分

10　仮にリット市場でブローカーになった場合には，マーケットメーカーの存在により取引不成立の心配はなく，利得は$\phi$で一定であるから，$x^*$の大小を気にすることはない。

布は，以下のように計算できる。

$$\Pr[P=P_6|v=1]=\frac{(1-x^*)^2(1-\mu)^2}{4},$$

$$\Pr[P=P_3|v=1]=x^*(1-x^*)(1-\mu),$$

$$\Pr[P=1/2|v=1]=x^{*2}+(1-x^*)^2(1-\mu)\left((1-\theta)\mu+\frac{1-\mu}{2}\right),$$

$$\Pr[P=P_2|v=1]=x^*(1-x^*)(2(1-\theta)\mu+(1-\mu)),$$

$$\Pr[P=P_5|v=1]=(1-x^*)^2\left((1-\theta)\mu+\frac{(1-\mu)^2}{4}\right),$$

$$\Pr[P=1|v=1]=\theta(1-x^*)\mu(2-(1-x^*)\mu).$$

これら六つの確率を足し上げれば1である。これらの確率に，前節で導出した均衡1から3に対応する $x^*$ の値を代入すれば，それぞれの均衡における価格の確率分布を得る[11]。

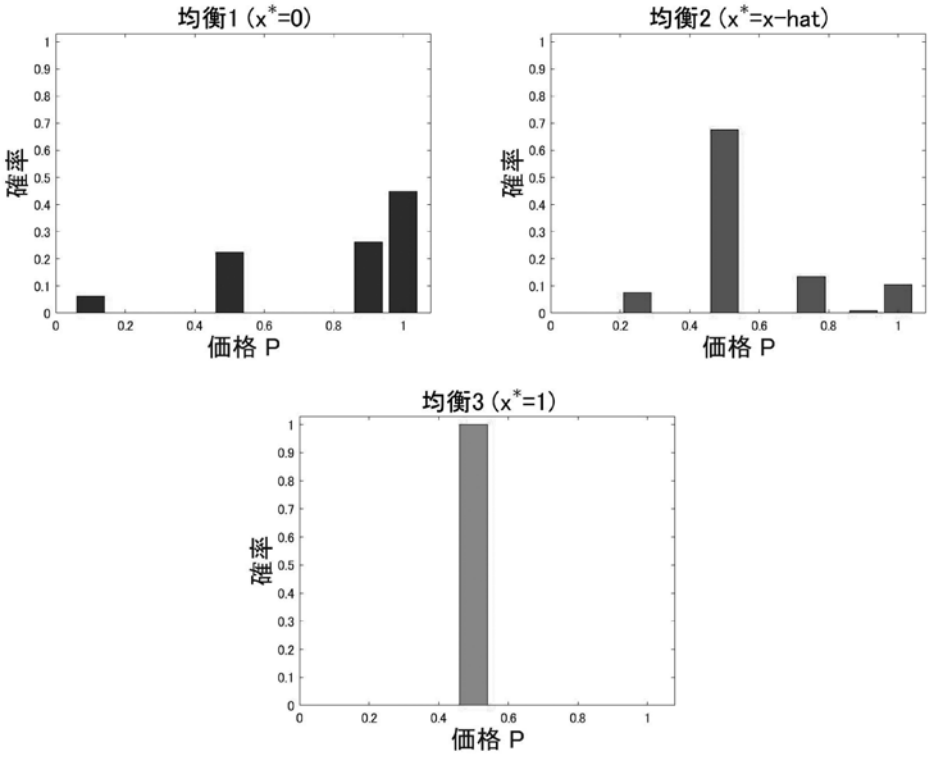
図表3は，図表2のパネル(b)のように三つの複数均衡がある場合の，リット市場における価格 $P$ の確率分布である[12]。パネル(a)は，投資家が二人ともリット市場を使う均衡1のケースである。リット市場での価格が，平均的に真の価値 $v=1$ に近づいていることが分かる。これは，ディーラーが持つ $v$ についての私的情報をマーケットメーカーが価格に織り込むからである。平均的には価格は真の価値 $v=1$ に近づくが，$v=1$ から遠く離れた低い価格 $P=P_6$ も無視できない確率で実現することも分かる。これは，投資家が二人ともブローカーとして $v=1$ という事実とは無関係に売り注文を出すことも，確率的にはあり得るためである。その場合，マーケットメーカーは $v=0$ の可能性が高いと（誤って）判断し，$v=0$ に近い価格を付けることになる。まとめると，均衡1でのリット市場における価格は，平均的には真の価値に近づくが，同時にボラティリティも大きくなるのである。

図表3のパネル(b)は，リット市場とダークプールが共存する均衡2のケースである。ここでも，$v=1$ と知るディーラーがリット市場で買い注文を出す可能性はあるため，価格の確率分布は中央よりやや $v=1$ の方に偏っている。しかし，ディーラーの $v$ についての私的情報がダークプールに隠れるケースもあるため，均衡1と比べると，価格が真の価値 $v=1$ に偏る度合いは低く，$v$ の事前期待値である $\frac{1}{2}$ 周辺に厚く分布している。$v$ の値とは無関係に注文を出すブローカーが二人ともリット市場に集中する確率は低いため，極端に低い価格 $P=P_6$ や極端に高い価格 $P=P_5$ が実現する確率も，均衡1と比べると低い。まとめると，均衡2でのリット市場における価格は，真の価値にやや偏るものの，事前期待値 $\frac{1}{2}$ の周辺に大きく分布する。

11 $(B,S)$ には6つのケースがあり，その各ケースが実現する確率は，投資家の $x^*$ に依存して決まる。その $x^*$ の値は均衡1から3で異なるため，$(B,S)$ の確率分布，ひいてはその $(B,S)$ によって定まる $P$ の確率分布は均衡1から3で異なるのである。

12 図中で使用したパラメータの値は，$\mu=0.5$，$\theta=0.6$，$\phi=0.01$ である。

図表３　リット市場における価格 $P$ の確率分布（$v$=1のケース）




リット市場が使われること自体が少ないため，ボラティリティは小さくなる。

図表３のパネル(c)は，投資家がリット市場を使わない均衡３である。ここでは，$v$ についての私的情報が一切リット市場には入らないため，マーケットメーカーがつける価格は事前期待値 $\frac{1}{2}$ に等しい。投資家がリット市場を利用しないため，ボラティリティはゼロである。

## ５．おわりに

本稿では，標準的な金融経済学をもとに，ダークプールのシンプルな理論モデルの構築を試みた。モデルでは，ディーラーかブローカーになりうる二人の情報投資家が，リット市場とダークプールのいずれかを選択する。リット市場にはマーケットメーカーが常駐するため売買不成立のリスクはないが，マーケットインパクトとフロントランニングのリスクがある。他方ダークプールでは，マーケットインパクトはないが，投資家同士が協調しなければ売買自体が不成立になるリスクがある。分析の結果，フロントランニングのリスクが小さい場合，リット市場だけが利用される「均衡１」が唯一の均衡になる。しかし，フロントランニングのリスクが高い場合，均衡１に加えて，両プラットフォームが共存する「均衡２」と，ダークプールだけが利用される「均衡３」も，複数均衡として出現する。三つの均衡のうちどれが実現するかは，投資家たちの自己実現的期待に依存する。三つの均衡

はパレート順位付けができ，経済厚生が最も高いのは均衡３，次に均衡２，最も低いのは均衡１である。すなわち，リット市場のみが利用される均衡は，経済厚生が低いにもかかわらず，投資家間の「協調の失敗」の結果として実現しうるのである。ダークプールの存在は，リット市場の価格形成に影響を与える。情報投資家が有する私的情報がダークプール内に留まる可能性があるため，リット市場における価格の情報反映度とボラティリティはともに小さくなる。

今後は，変化の速い現実のマーケットに対応し，本稿の枠組みをより 現実に則した方向に拡張していくことが求められる。とりわけ，近年の金融テクノロジーやインフラの高度化を背景にした証券取引の小口化の進展は，ダークプールの役割にも変化をもたらしているようである。大墳（2017）は，「取引の小口化によって，ダーク・プールは大口注文の円滑な執行市場という，従来期待された特別な立ち位置にあるものではなく，もはや，立会市場と並列な位置付けにある，単なる市場の１つとして存在していると捉えることができる」と指摘する。そうであれば，新たなダークプールの存在意義は何か，他の取引プラットフォームとの関係はどう変化するのか等，分析すべき事柄は多い。今後の研究の課題としたい。

## 参　考　文　献


大墳 剛士，2016，「諸外国における市場構造と HFT を巡る規制動向」，金融庁金融研究センター ディスカッションペーパー，DP2016-4.

大墳 剛士，2017，「日本におけるダーク・プールの実態分析」，JPX ワーキングペーパー，Vol.21.

清水 葉子，2013，「HFT，PTS，ダークプールの諸外国における動向～欧米での証券市場間の競争や技術革新に関する考察～」，金融庁金融研究センター ディスカッションペーパー，DP2013-2.

Brogaard, J. and J. Pan, 2021, "Dark pool trading and information acquisition," *The Review of Financial Studies*, Volume 35, Issue 5, pp.2625–2666.

Buti, Rindi, and Werner, 2017, "Dark pool trading strategies, market quality and welfare," *Journal of Financial Economics*, Volume 124, Issue 2, Pages 244–265.

Comerton-Forde, C. and T. Putnins, 2015, "Dark trading and price discovery," *Journal of Financial Economics*, Volume 118, Issue 1, Pages 70–92.

Glosten, L. and P. Milgrom, 1985, "Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders," *Journal of Financial Economics*, Volume 14, Issue 1, Pages 71–100.

Gresse, C., 2017, "Effects of lit and dark market fragmentation on liquidity," *Journal of Financial Markets*, Volume 35, Pages 1–20.

Kyle, A., 1985, "Continuous Auctions and Insider Trading," *Econometrica*, Vol.53, No.6, pp.1315–1335.

Ye, L., 2024, "Understanding the impacts of dark pools on price discovery," *Journal of Financial Markets*, Volume 68, 100882.

Zhu, 2014, "Do Dark Pools Harm Price Discovery?," *The Review of Financial Studies*, Volume 27, Issue 3, pp.747–789.

# Appendix: (7)式と(8)式の導出

## A-1. リット市場での期待利得

仮に投資家がリット市場に行くとすると，期待利得はいくらであろうか。それを計算するためには，いくつかのシナリオの場合分けをし，そのそれぞれについて，投資家の利得を計算する必要がある。

### 1. $v=1$のとき

(a) ディーラーになった場合：$v=1$なので，自分は買い注文を出す。

ⅰ．フロントランニングがある場合（確率 $\theta$）：

ありうる $(B,S)$ は $\{(1+f,0),(1+f,1),(2+f,0)\}$ だが，いずれの場合でもディーラーが $v=1$ と知った上で買い注文を出したことがマーケットメーカーに伝わるため，$P=\mathrm{E}[v|(B,S)]=1$ となる[13]。よって，ディーラーの利得は $v-P=1-1=0$ である。

ⅱ．フロントランニングがない場合（確率 $(1-\theta)$）：

自らの買い注文から，ありうる $(B,S)$ は $\{(1,0),(1,1),(2,0)\}$ と分かる。自らの買い注文を所与とすると，$(B,S)=(1,0)$（ケース２）になる主観的確率は $x^*$，すなわち，もう一人の投資家がダークプールに行く確率に等しい。同様に考えると，$(B,S)=(1,1)$（ケース４）になる主観的確率は $(1-x^*)\dfrac{1-\mu}{2}$，$(B,S)=(2,0)$（ケース５）になる主観的確率は $(1-x^*)\left(\mu+\dfrac{1-\mu}{2}\right)=\dfrac{1+\mu}{2}$ である。ディーラーは，それぞれの $(B,S)$ のケースに応じた $P$ によって，利得 $v-P=1-P$ を得る。

つまり，リット市場に行き，$v=1$ で，かつディーラーになったことを所与とした期待利得は，以下の通りである。

$$\Pi^{\mathrm{lit}}_{v=1,d}=(1-\theta)\left(x^*(1-P_2)+(1-x^*)\frac{1-\mu}{2}(1-P_4)+(1-x^*)\frac{1+\mu}{2}(1-P_5)\right)$$

$$=\frac{(1-\theta)(1-\mu)(1+x^*\mu^2)}{2(1+\mu^2)}. \tag{14}$$

(b) ブローカーになった場合：リット市場にいるので，買い注文か売り注文かに関わらず，必ずマーケットメーカーと取引が成立する。よって，リット市場に行き，$v=1$ で，かつブローカーになったことを所与とした期待利得は，以下の通りである。

13　フロントランニングは，そもそもディーラーの注文が出るときにのみ発生するという仮定である。そのため，$(1+f,0)$ がブローカーとフロントランナーの買い注文である可能性はない。同様に，$(0,1+f)$ がブローカーとフロントランナーの売り注文である可能性もない。

$$\Pi^{\text{lit}}_{v=1,b} = \phi. \tag{15}$$

**2.** $v = 0$ **のとき**

(a) ディーラーになった場合：$v = 0$ なので，自分は売り注文を出す。

i．フロントランニングがある場合（確率 $\theta$）：

ありうる $(B,S)$ は $\{(0,1+f),(1,1+f),(0,2+f)\}$ だが，いずれの場合でもディーラーが $v=0$ と知った上で売り注文を出したことがマーケットメーカーに伝わるため，$P = \mathrm{E}[v|(B,S)] = 0$ となる。そのため，ディーラーの利得は $P - v = 0 - 0 = 0$ である。

ii．フロントランニングがない場合（確率 $(1-\theta)$）：

自身の売り注文から，ありうる $(B,S)$ は $\{(0,1),(1,1),(0,2)\}$ と分かる。自らの売り注文を所与とすると，$(B,S) = (0,1)$（ケース３）になる主観的確率は $x^*$，すなわち，もう一人の投資家がダークプールに行く確率に等しい。同様に考えると，$(B,S) = (1,1)$（ケース４）になる主観的確率は $(1-x^*)\dfrac{1-\mu}{2}$，$(B,S) = (0,2)$（ケース６）になる主観的確率は $(1-x^*)\left(\mu + \dfrac{1-\mu}{2}\right) = (1-x^*)\dfrac{1+\mu}{2}$ である。ディーラーは，それぞれの $(B,S)$ のケースに応じた $P$ によって，利得 $P - v = P$ を得る。

つまり，リット市場に行き，$v=0$ で，かつディーラーになったことを所与とした期待利得は，以下の通りである。

$$\begin{aligned}\Pi^{\text{lit}}_{v=0,d} &= (1-\theta)\left(x^* P_3 + (1-x^*)\frac{1-\mu}{2}P_4 + (1-x^*)\frac{1+\mu}{2}P_6\right) \\ &= \frac{(1-\theta)(1-\mu)(1+x^*\mu^2)}{2(1+\mu^2)}.\end{aligned} \tag{16}$$

(b) ブローカーになった場合：リット市場にいるので，買い注文か売り注文かに関わらず，必ずマーケットメーカーと取引が成立する。よって，リット市場に行き，$v=0$ で，かつブローカーになったことを所与とした期待利得は，以下の通りである。

$$\Pi^{\text{lit}}_{v=0,b} = \phi. \tag{17}$$

(14)，(15)，(16)，(17) をそれぞれに対応する確率でウェイト付けして足し上げると，リット市場に行く投資家が得る期待利得を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\Pi^{\text{lit}}(x^*) &= \Pr[v=1]\left(\mu\Pi^{\text{lit}}_{v=1,d} + (1-\mu)\Pi^{\text{lit}}_{v=1,b}\right) + \Pr[v=0]\left(\mu\Pi^{\text{lit}}_{v=0,d} + (1-\mu)\Pi^{\text{lit}}_{v=0,b}\right) \\ &= (1-\mu)\left(\frac{(1-\phi)\mu(1+x^*\mu^2)}{2(1+\mu^2)} + \phi\right).\end{aligned} \tag{18}$$

## A-2. ダークプールでの期待利得

仮に投資家がダークプールに行くとすると，期待利得はいくらであろうか。それを計算するためには，A-1 節と同様に，いくつかのシナリオの場合分けをし，そのそれぞれについて投資家の利得を計算する必要がある。

### 1. $v=1$ のとき

(a) ディーラーになった場合：$v=1$ なので，自分は買い注文を出す。

もう一人の投資家もダークプールに来て，かつ売り注文を出すときのみ，売買が成立する。その主観的確率（自身の買い注文は所与とする）は，$x^*\frac{1-\mu}{2}$。価格は$\frac{1}{2}$だから，売買が成立したときの利得は $v-P=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ である。売買不成立ならば，利得は 0 である。すなわち，ダークプールに行き，$v=1$ で，かつディーラーになったことを所与とした期待利得は，以下の通りである。

$$\Pi^{\text{dark}}_{v=1,d}=x^*\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{2}=\frac{x^*(1-\mu)}{4}. \tag{19}$$

(b) ブローカーになった場合：

i．買い注文を出す場合（確率$\frac{1}{2}$）：

売買が成立するのは，もう一人の投資家もダークプールに来て，かつ売り注文を出すときのみである。その主観的確率（自身の買い注文は所与とする）は $x^*\frac{1-\mu}{2}$ であり，そのときの利得は $\phi$ である。

ii．売り注文を出す場合（確率$\frac{1}{2}$）：

売買が成立するのは，もう一人の投資家もダークプールに来て，かつ買い注文を出すときのみである。その主観的確率（自身の売り注文は所与とする）は $x^*\left(\mu+\frac{1-\mu}{2}\right)=x^*\frac{1+\mu}{2}$ であり，そのときの利得は $\phi$ である。

つまり，ダークプールに行き，$v=1$ で，かつブローカーになったことを所与とした期待利得は，以下の通りである。

$$\Pi^{\text{dark}}_{v=1,b}=\frac{1}{2}x^*\frac{1-\mu}{2}\phi+\frac{1}{2}x^*\frac{1+\mu}{2}\phi=\frac{x^*\phi}{2}. \tag{20}$$

### 2. $v=0$ のとき

(a) ディーラーになった場合：$v=0$ なので，自分は売り注文を出す。

もう一人の投資家もダークプールに来て，かつ買い注文を出すときのみ，売買が成立する。その主観的確率（自らの売り注文は所与とする）は，$x^*\frac{1-\mu}{2}$ である。価格は$\frac{1}{2}$だから，売買が成立したときの利得は $P-v=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$ である。売買不成立ならば，利得は 0 である。

つまり，ダークプールに行き，$v=0$ で，かつディーラーになったことを所与とした期待利得は，以下の通りである。

$$\Pi^{\text{dark}}_{v=0,d} = x^* \frac{1-\mu}{2} \frac{1}{2} = \frac{x^*(1-\mu)}{4}. \tag{21}$$

(b) ブローカーになった場合：

i．売り注文を出す場合（確率 $\frac{1}{2}$）：

売買が成立するのは，もう一人の投資家もダークプールに来て，かつ買い注文を出すときのみである。その主観的確率（自らの売り注文は所与とする）は $x^* \frac{1-\mu}{2}$ であり，そのときの利得は $\phi$ である。

ii．買い注文を出す場合（確率 $\frac{1}{2}$）：

売買が成立するのは，もう一人の投資家もダークプールに来て，かつ売り注文を出すときのみである。その主観的確率（自らの買い注文は所与とする）は $x^*\left(\mu+\frac{1-\mu}{2}\right) = x^* \frac{1+\mu}{2}$ であり，そのときの利得は $\phi$ である。

つまり，ダークプールに行き，$v=0$ で，かつブローカーになったことを所与とした期待利得は，以下の通りである。

$$\Pi^{\text{dark}}_{v=0,b} = \frac{1}{2} x^* \frac{1-\mu}{2} \phi + \frac{1}{2} x^* \frac{1+\mu}{2} \phi = \frac{x^* \phi}{2}. \tag{22}$$

(19)，(20)，(21)，(22) をそれぞれに対応する確率でウェイト付けして足し上げると，ダークプールに行く投資家が得る期待利得を以下のように求めることができる。

$$\Pi^{\text{dark}}(x^*) = \Pr[v=1]\left(\mu \Pi^{\text{dark}}_{v=1,d} + (1-\mu)\Pi^{\text{dark}}_{v=1,b}\right) + \Pr[v=0]\left(\mu \Pi^{\text{dark}}_{v=0,d} + (1-\mu)\Pi^{\text{dark}}_{v=0,b}\right)$$

$$= \frac{(1-\mu)x^*}{2}\left(\frac{\mu}{2} + \phi\right). \quad \square \tag{23}$$

（慶應義塾大学経済学部教授）