証券経済研究　第122号（2023.6）

ペイオフの平均回帰の構造が資産価格に及ぼす影響

田　代　一　聡

要　旨

本論ではペイオフの平均回帰の構造の可能性がある時に，資産価格等にどのような影響をもたらすかについて検討する。

その結果，いくつかの含意が得られた。ペイオフが平均回帰の構造をしていると信じている投資家は，そうでない投資家よりも情報に対する反応が鈍いという点である。この結果は，平均回帰の構造を投資家が無視してしまうことが，過大反応を引き起こす源泉となりうることにつながってくる。

キーワード：資産価格理論，リターンの平均回帰性

目　次

1．はじめに

伝統的な資産価格理論において，ほとんどの場合，長期の投資と短期の投資の間に本質的な差はない。すなわち短期が繰り返されて長期となり，長期と短期の投資の間に齟齬は存在しない。

しかし，長期投資において，平均回帰性を考慮するというのは，さほど不思議ではない。例えば，臼杵（2019）では，長期運用において，平均回帰性を考慮した資産配分について考えている。その一方で，短期投資において，平均回帰性を考慮されているようには思われない。このような想定の基では，短期の繰り返しで長期の投資を表現するのは難しいように思われる。

本論では，長期に資産のペイオフが平均回帰

するという構造が，資産価格等にどのような含意をもたらすかを検討する。

平均回帰の構造自体は，非常に古くから取り入れられてきた。金利のモデルでは，Vasicek（1977）がおそらく最初であろう。以降，金融工学の分野では平均回帰過程が使われている。しかし，情報の非対称性の問題を取り扱うことを目的とした資産価格理論モデルにおいて，平均回帰を取り入れたものは筆者の知る限りない。

本論では，ペイオフの構造に平均回帰性を導入し，資産価格等への含意を見ていく。

前段で述べたように，平均回帰性は長期において見られる現象であろう。長期の資産価格で関連する文献として，まず挙がるのが，Bansal and Yaron（2004）である。彼らのモデルは，長期的な消費・配当成長の見通しと，短期的な消費のリスクを合わせて，均衡モデルを構築している。

また，van Binsbergen，Brandt and Koijen（2012）では，短期のリスクプレミアムの方が，長期のリスクプレミアムよりも高いという発見をした。短期のリスクプレミアムの方が長期のリスクプレミアムよりも低いというのならば，自然であるが，その逆になっているという発見は驚きである。この発見は，投資家は長期には平均回帰が起きると期待しているという考えとも，整合的であろう。

本論の以下の構成は以下の通りである。

２章では，分析するモデルを提示する。３章では分析行い，４章では平均回帰性のもたらす事柄について議論を行う。

２．モデル

2.1　基本構造

０時点から３時点までの４つの時点を考える。１種類の危険資産と１種類の安全資産が存在する，安全資産の純リターンは０に基準化し，弾力的に供給される。危険資産の供給量は１に基準化する。危険資産は，３時点にペイオフ d_1+d_2 を発生させる。d_1 の情報は１時点に得られ，d_2 の情報は２時点に得られる，３時点にペイオフ d_1+d_2 が実現し清算される。ペイオフの事前分布は，２つの可能性がある。ひとつは，独立なペイオフの可能性であり，ペイオフの事前分布は $d_i \sim N(d, \sigma_d^2)$，ただし，$d>0, \sigma_d>0$ で，d_1 と d_2 は独立に生じる。もうひとつの可能性は，平均回帰のペイオフの可能性である。その場合は，$d_1 \sim N(d, \sigma_d^2)$ であるが，d_2 は $d_2 \sim N(d + \beta(d-d_1), \sigma_d^2)$，ただし，$0<\beta \leq 1$ という分布から発生する。

０時点，１時点，２時点で各投資家が取引を行い，その取引価格を p_t で表す。また，各時点での取引のコストは０を仮定する。

2.2　投資家

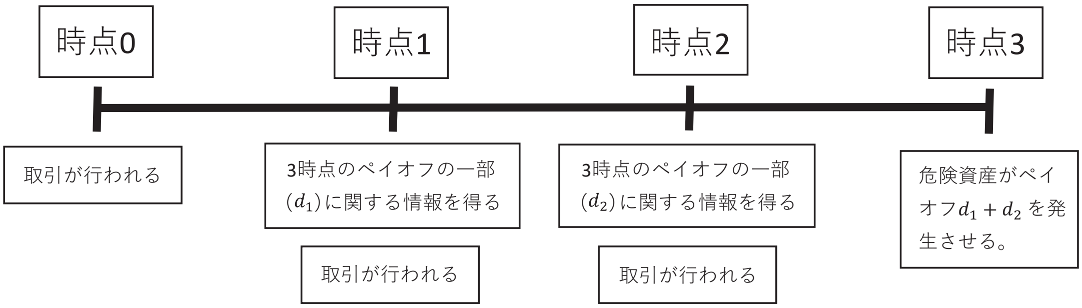
投資家には２種類のタイプが存在する。ひとつのタイプは，ペイオフの構造が独立であると認識している投資家である（タイプ I）。もうひとつのタイプは，ペイオフが平均回帰の構造を持っていると認識している投資家である（タイプ M）。

投資家の存在量は１に基準化し，ペイオフが

１　それぞれ，のタイプの投資家は別のタイプの投資家が存在することを認識しており，両者がそれぞれ，自分が正しい認識をしていると考えており，別のタイプの投資家は間違った認識をしていると考えている。

また，ここでの関心は，２時点までの需要量や価格であり，誤った認識をしていることで３時点に損失を被るかには関心がない。

図表１　モデルのタイムライン



（出所）　著者作成

独立であると認識している投資家の割合を α，ペイオフが平均回帰の構造を持っていると認識している投資家の割合を$1-\alpha$で表す。また，個々の投資家は非常に小さいため，価格に影響を与えることはできない。

そして，ペイオフが独立であると認識している投資家の需要を D_t^I，ペイオフが平均回帰の構造を持っていると認識している投資家の需要を D_t^Mで表す。

投資家の初期の富を W で，効用は２時点の富の量（W_2）に対するCARA効用関数で表される，すなわち，$U_i(W_2^i)=-e^{-\gamma W_2^i}$である。ただし，$i$ は各投資家を表す($i\in[0,1]$)。投資家は，各時点で期待効用を最大にするように投資を選択する。危険資産の購入量を θ で表す。

d_1の情報は，$s_1=d_1+\epsilon_1$，$\epsilon_1 \sim N(0,\ \sigma_s^2)$が１時点の取引前に得られ，$d_2$の情報$s_2=d_2+\epsilon_2$，$\epsilon_2 \sim N(0,\ \sigma_s^2)$が２時点の取引前に得られる。情報は全投資家に共通の情報である。

モデルのタイムラインは図表１の通りである

３．分析

3.1　ケース1：ベンチマークケース

このモデルのベンチマークケースとして，すべての投資家がペイオフは独立であると認識しているケース（$\alpha=1$）を考える。

各投資家 i の t 時点の効用最大化問題は，

$$\max_{\theta i} E_t[-e^{-\gamma(W-p_t\theta_i+\theta_i(d_1+d_2))}]$$

なので，

$$\max_{\theta i} E_t[W-p_t\theta_i+\theta_i(d_1+d_2)]-\gamma\theta_i^2 Var_t(d_1+d_2)$$

の最大化問題と等しい。最大化の一階の条件から，この投資家の需要量は

$$\theta_i=\frac{E_t[(d_1+d_2)-p_t]}{\gamma Var_t(d_1+d_2)}$$

となる。各投資家の需要量の合計は，$\alpha=1$と投資家の存在量が１であるので，

$$D_t^I=\frac{E_t[(d_1+d_2)-p_t]}{\gamma Var_t(d_1+d_2)}$$

危険資産の供給量は１であるので，市場均衡価格は

$$p_t=E_t[(d_1+d_2)]-\gamma Var_t(d_1+d_2)$$

となる。そのため，各時点の価格を求めると，０時点は

$$p_o=2d-2\gamma\frac{1}{\lambda_d}$$

１時点は，シグナル s_1を入手するので，

$$p_1=\left(1+\frac{\lambda_d}{\lambda_d+\lambda_s}\right)d+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_1-\gamma\frac{1}{\lambda_d}-\gamma\frac{1}{\lambda_d+\lambda_s}$$

２時点は，さらにシグナル s_2を入手するので，

$$p_2=2\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_d+\lambda_s}\right)d+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_1+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_2-2\gamma\frac{1}{\lambda_d+\lambda_s}$$

となる。ただし，$\lambda_d=\frac{1}{\sigma_d}$，$\lambda_s=\frac{1}{\sigma_s}$を表す。

１時点と２時点でシグナルを得たことで，シグナルの方向へ平均値が動き，分散が小さくなっていくという形で表されている。

3.2　ケース2：平均回帰のケース

次に極端なケースとして，平均回帰の信念を持つ投資家だけが存在するケース（$\alpha=0$）を考える。この場合も各投資家の最適化の条件は前節の結果と同じであり，

$$D_t^M=\frac{E_t[(d_1+d_2)-p_t]}{\gamma Var_t(d_1+d_2)}$$

$$p_t=E_t[(d_1+d_2)]-\gamma Var_t(d_1+d_2)$$

となる。

０時点の価格は $p_o=2d-2\gamma\frac{1}{\lambda_d}$でベンチマークケースと同じになり，１時点で d_1の情報を入手した後に違いが生じる。

$$p_1=d+\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_d+\lambda_s}d+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_1\right)-\gamma\frac{1}{\lambda_d}-\gamma\frac{1}{\lambda_d+\lambda_s}+\beta\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}(d-s_1)$$

ベンチマークケースと平均回帰のケースのシグナルの価格に与える影響を見ると，それぞれ，$\frac{\lambda_S}{\lambda_d+\lambda_s}s_1$と $(1-\beta)\frac{\lambda_S}{\lambda_d+\lambda_s}s_1$である。この関係式から，平均回帰性の強さを表すパラメータ（β）が強くなるのに応じて，シグナルの方向への平均値の動きが鈍くなっていく。そして，βは平均回帰のパラメータであるので，d_1に対するシグナル影響が弱くなるのは，d_2が平均回帰の構造を持つと思っていることによって生じている。

$\beta=1$という極端な場合を考えると，スムーズに理解できるであろう。$\beta=1$の場合は，d_1の実現値が何であろうと，d_1の平均からの乖離をキャンセルアウトするように d_2が生じる。そのため，シグナル s_1から得られる d_1の実現値に関する情報は，平均回帰の構造のために，意味がなくなってしまう。結果として，d_1のシグナルは完全に無視されてしまうのである。

そして，ベンチマークケースと比較して，$d<s_1$ならば，平均回帰性のために d_2の低い値を予測するため価格が安くなる。逆に，$d>s_1$ならば高い d_2を予測するため価格が高くなる。

そして，ベンチマークケースと比較して，$d<s_1$ならば，平均回帰性のために d_2の低い値を予測するため価格が安くなる。逆に，$d>s_1$ならば高い d_2を予測するため価格が高くなる。

２時点の価格は

$$p_2=2\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_d+\lambda_s}\right)d+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_1+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_2-2\gamma\frac{1}{\lambda_d+\lambda_s}+\beta\frac{\lambda_d\lambda_s}{(\lambda_d+\lambda_s)^2}(d-s_1)$$

である。

ベンチマークケースとの差は，最後の項

$\beta\frac{\lambda_d\lambda_s}{(\lambda_d+\lambda_s)^2}(d-s_1)$である。

１時点のベンチマークとの価格差は $\beta\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}(d-s_1)$であり，両者の関係は

$$\beta\frac{\lambda_d\lambda_s}{(\lambda_d+\lambda_s)^2}(d-s_1)<\beta\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}(d-s_1)$$

となるので，価格差は２時点のほうが縮まっていることになる。

このモデルの形で平均回帰性を定式化した場合に，平均回帰の信念を持つ投資家にとって，途中で得られる情報の影響が低くなっている[2]。これは，完全に平均回帰なリターン構造を持っているならば，最終的に平均的なリターンがもたらされると見込まれるので，途中の良

い情報もしくは悪い情報の価値がなくなるという直感と整合的であるように思われる。

3.3　ケース3：混在するケース

前節までは，１つのタイプの情報を持つ投資家しか想定しなかったが，この説では両タイプが混在するケース$(0<\alpha<1)$を考える。モデルをできる限り簡単にするために，ここでは，両方のタイプが得る情報は同一のものであると仮定する[3]。

各投資家の最適な投資は前節までと同じであり，市場均衡条件は

$$\alpha D_t^I+(1-\alpha)D_t^M=\alpha\frac{E_t^I[(d_1+d_2)-p_t]}{\gamma Var_t(d_1+d_2)}+(1-\alpha)\frac{E_t^M[(d_1+d_2)-p_t]}{\gamma Var_t(d_1+d_2)}=1$$

となる。E_t^jはタイプjの投資家の期待値を表す[4]。

０時点の価格は$p_o=2d-2\gamma\frac{1}{\lambda_d}$でベンチマークケースと同じである。１時点と２時点の価格は，それぞれ

$$p_1=d+\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_d+\lambda_s}d+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_1\right)-\gamma\frac{1}{\lambda_d}-\gamma\frac{1}{\lambda_d+\lambda_s}+(1-\alpha)\beta\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}(d-s_1),$$

$$p_2=2\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_d+\lambda_s}\right)d+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_1+\frac{\lambda_s}{\lambda_d+\lambda_s}s_2-2\gamma\frac{1}{\lambda_d+\lambda_s}+(1-\alpha)\beta\frac{\lambda_d\lambda_s}{(\lambda_d+\lambda_s)^2}(d-s_1),$$

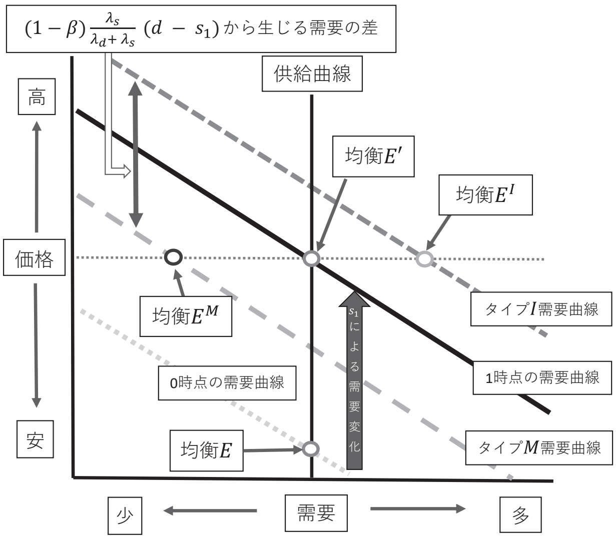
となる。前節の両極端の状況の中間となる。

ベンチマークケースと平均回帰のケースの中間の状況では，価格が中間の水準となるというのは非常に直感的である。しかし，各投資家の需要量を見ることで，やや興味深い傾向が見える

$s_1>d$の場合に，p_1,p_2の最後の項はマイナスになる。この時の需要曲線の変化と均衡の変化を描いたのが図表２である。

s_1のシグナルを受けて，需要曲線は上昇し，

図表２　需要曲線と均衡（$s_i>d$のケース）



（出所）　著者作成

2　ベンチマークケースと比較して，シグナルの影響が小さい。
3　このような仮定を置くことで，均衡における価格を通じた情報伝達の問題を考慮しないで済む。
4　分散も投資家のタイプ別に表示すべきであるが，ここのモデルは両者が同じであるので省略している。

均衡 E から，均衡 E' へと移動することになる。この均衡の移動を言葉で表現すると次のようになるであろう。

投資家は，高い d_1 を予想させるシグナルの発生を観察し，市場の価格は上昇する。この価格の上昇は，タイプ I にとっては過小な上昇であり，タイプ M にとっては過大な上昇であると考えている。

そのため，0時点では，同じ量の証券を保有していた両タイプであるが，タイプ I は保有量を増やし，タイプ M は保有量を減らそうとする。

まず，タイプ I が保有量を増やすとしよう，すると，価格上昇圧力が生じるため，均衡 E^I の水準まで保有を増やすことはできない。次に，タイプ M が保有量を減らすが，やはり価格下落圧力のため，均衡 E^M の水準まで減らすことはできない。しかし，タイプ M によって生じた価格下落圧力のために，タイプ I は保有量をさらに増やすことができ，そして，タイプ I によって生じた価格上昇圧力のために，タイプ M が保有量をさらに減らすことができる。このようなサイクルが繰り返されることによって，タイプ I は均衡 E^I の水準まで保有を増やし，タイプ M は均衡 E^M の水準まで保有量を減らすことができるのである。

このような両タイプが相互に関係し，行動をより極端な方向へ動かすことが，前説までの分析では見ることのできなかった点である。

4．議論

4.1　平均回帰と情報への過大反応・過小反応

上の分析モデルでは，それぞれの投資家が，ペイオフの分布が独立あるいは平均回帰であるかのどちらかを信じると仮定していた。

この仮定を変更し，全ての投資家が，確率 α で独立の分布，確率 $1-\alpha$ で平均回帰と認識していると考えてみる（混合分布のケース）。このように変更をしても，混在するケースと1時点の需給均衡の価格（p_1）は変わらない[5]。

図表2は，混在のケースだけでなく，混合分布のケースの均衡も表している。シグナル $s_1>d$ が生じたことで，0時点から需要曲線は上に移動し，均衡 E から均衡 E' へ移動する。

混合分布のケースでは，最初から1時点の需要曲線へ移動する。それに対して，混在のケースでは，独立の投資家（タイプ I）と平均回帰の投資家（タイプ M）で需要曲線の動きが異なる。タイプ I の方がタイプ M，そして全体の需要曲線よりも，シグナル s_1 によって需要が大きく動くが，全体としては，混合分布のケースと同じ需要曲線となる。

混合分布のケースが「合理的な情報の取り込み」であると考えた場合，タイプ I は情報に対して過大な反応を，タイプ M は過小な反応をしていることを意味することになる。

平均回帰という想定しうる構造を，誤って認識することが[6]，過大反応の原因になりうると

5　p_2 は s_2 の情報から，分布の確率の改定が行われるため，一般には二つのケースで異なる。

6　ペイオフ構造を誤って認識しているという考えは新しい物ではなく，例えば Hong，Stein，and Yu（2007）が同様に，構造の誤認を用いて，資産価格の大きな変動を説明するモデルを提示している。

いうのは興味深い現象であるように思われる。このモデルでは，情報への過大反応，つまり価格が合理的な水準よりも高くなるとは言えない。しかし，例えば，空売り制約を導入することで，価格が高くなる可能性を示すのは容易である。

4.2　平均回帰の信念と時間不整合性

資産価格理論において，時間不整合をもたらす効用の元での分析がされている。代表的な論文として Harris and Laibson（2001）や Luttmer and Mariotti（2003）がある。これらの分析は，双曲割引関数（hyperbolic discount function）や双曲割引関数をより一般化した形で，現在バイアス（present bias）を導入し，時間不整合性の分析を行っている。

長期の平均回帰の信念は，現在バイアスとは別の形で時間不整合性をもたらす可能性があると考えられる。長期的には平均回帰性が存在すると考える投資家であったとしても，短期的に平均回帰性が成立すると考えているようには思われないためである[7]。

そのため，平均回帰性が存在するという前提で，老後の資金のような長期的な投資を目的として行う場合に最適な投資行動と，短期的な投資判断を積み重ねて長期の投資を行う場合に取られる投資行動では異なる行動となるであろう。

さらに，Luttmer and Mariotti（2003）では，現在バイアスは安全利子率には影響するが，リスクとリターンの関係には影響を与えないことが議論されている。一方で，平均回帰性に伴う長期と短期の時間不整合性の場合は，長期に平均回帰性を期待しているため安定したリターンが期待されるのに対し，短期では平均回帰性を考慮しない。そのために，時間不整合の存在の有無によって，リスクとリターンの関係が変化する可能性が期待される。

5．おわりに

本論では，平均回帰のペイオフ構造の可能性が，資産価格にもたらす含意について分析を行った。取り扱いやすさのために，非常にシンプルなモデルでの議論を行った。そのため，本論での平均回帰性の想定は，万人に納得されるものになっているとは思えない。しかし，それでも，いくつかの興味深い含意が得られたように思われる。

一つは，平均回帰の信念を持つ投資家は，途中の情報を相対的にあまり考慮しないという点である。平均回帰性を信じているために，途中のリターンが良いもしくは悪かったとしても，その後にそれを埋め合わせるように，その後のリターンが生じるため，途中のリターンに関する情報はあまり重要でなくなる。そのために途中の情報を相対的にあまり考慮されない。

もう一つは，平均回帰の信念とそうではない投資家が混在している状況では，購入量を増やす・減らす行動を互いに逆方向に取り，それによってさらに極端な行動にさせるという点である。

例えば，同様のモデルで，例えば Grossman and Stiglitz（1980）では，情報をもつ投資家と情報を持たない投資家が存在する。このモデルでは，情報を持たない投資家は，価格から情報を持つ投資家の情報を推測して行動する。そ

7　例えば，Asness 達［2013］が示したように，短期的にはモーメンタムが広くみられる

のため，情報を持たない投資家は情報を持つ投資家の行動と同じような行動をとろうとするため，情報を持つ投資家の行動をよりマイルドにすることになる。

最後に，平均回帰の構造を無視する投資家が存在するときに，情報に対する過大反応を起こす源泉となりうる点も興味深い。高頻度取引業者（HFT）をはじめとした，短いタイムホライゾンで取引を手仕舞う投資家にとって，長期での平均回帰構造が実際に存在したとしても，自身は平均回帰の影響を受けないと考えているであろう。もしそうであれば，そういった短いタイムホライゾンの投資家が，過大反応の源泉となるかもしれない。

しかし，課題も多く残されている。特に，平均回帰に対する考えから，時間不整合性を起こしうるように思われるが，分析できておらず，今後の課題となる。

引　用　文　献

臼杵 政治（2019）「株式リターンの平均回帰と年金運用」『年金ストラテジー』，Vol.274, pp.2-3。

Asness, C. S., Moskowitz T. J. and Pedersen L. H. (2013), "Value and Momentum Everywhere" *Journal of Finance*, Vol.68, pp.929-985

Bansal, R. and Yaron A. (2004), "Risks for the Long Run," *Journal of Finance*, Vol.59, pp.1481-1509.

van Binsbergen, J., Brandt M. and Koijen R. (2012), "On the Timing and Pricing of Dividends," *American Economic Review*, Vol.102, pp.1596-1618.

Grossman, S. J. and Stiglitz J. E. (1980), "On the Impossibility of Informationally Efficient Markets," *American Economic Review*, Vol.70, pp.393-408.

Harris, C. and Laibson D. (2001), "Dynamic Choices of Hyperbolic Consumers," *Econometrica*, Vol.69, pp.935-957.

Hong, H., Stein J. and Yu J. (2007), "Simple forecasts and paradigm shifts," *Journal of Finance*, Vol.62, pp.1207-1242.

Vasicek, O. (1977), "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, Vol.5, pp.177-188.

Luttmer, E. and Mariotti T. (2003), "Subjective discounting in an exchange economy," *Journal of Political Economy*, Vol.111, pp.959-989.

（当研究所研究員）