

# ハミルトニアン・モンテカルロ法を用いた Stochastic Volatility モデルのベイズ推定 による外国為替相場の分析

戸塚英臣  
三井秀俊

## 要 旨

本論文は、外国為替市場におけるボラティリティの確率的な変動について分析を行なったものである。特に、為替レート収益率とボラティリティとの間に非対称な動きが存在するかどうかの検証を行ない、同時にハミルトニアン・モンテカルロ法によるベイズ推定が、金融時系列モデルの分析に有効であるかどうかの検証を行なう。このようなボラティリティの確率的な動きを検証するため非対称 Stochastic Volatility モデルを用いてハミルトニアン・モンテカルロ法によるベイズ推定を行なうことにする。外国為替相場のデータとして、ユーロ/米ドル為替レート、米ドル/円為替レート、米ドル指数を利用する。実証分析では、ユーロ/米ドル為替レートでは収益率とボラティリティの間には非対称性は存在しないが、米ドル/円為替レートと米ドル指数では収益率とボラティリティの間には非対称性が存在するという結果となった。ここで、米ドル/円為替レートは米ドル指数に比べ負の相関は弱いボラティリティの対数値の自己相関関数の減衰は遅いことが分かった。また、非対称 Stochastic Volatility モデルのベイズ推定において、他のマルコフ連鎖モンテカルロ法と同様にハミルトニアン・モンテカルロ法の有効性が示された。

## 目 次

- |                    |              |
|--------------------|--------------|
| I. はじめに            | IV. データと実証結果 |
| II. SVL モデル        | 1. データ       |
| III. HMC 法によるベイズ推定 | 2. 実証分析      |
| 1. ハミルトニアン力学       | 3. 推定結果      |
| 2. HMC 法           | V. 考察        |
| 3. Leapfrog 法      | VI. 結論と今後の課題 |

## I. はじめに

リスク資産価格収益率のボラティリティは経験的な事実として時間を通じて確率的に変動していることが知られている。金融時系列分析ではボラティリティが確率的に変動するモデルとして、Stochastic Volatility（以下、SV）モデル<sup>1)</sup>があり、多くのリスク資産価格変動分析の実証研究に利用されている。SV モデルはボラティリティを観測されない変数として扱い、ボラティリティの対数が自己回帰の線形確率過程に従うとしてモデル化されている。本論文では、SV モデルを用いて外国為替相場におけるボラティリティの確率的変動についての検証を行なう。また、株式市場には、株価収益率とボラティリティとの間の関係として、ある種の非対称 (asymmetry) な動きがあることが知られている。つまり、株価収益率が下落すると、次期にはボラティリティは上昇し、株価収益率が上昇すると、次期にはボラティリティは下落する傾向があるとしている (Leverage effects)。これは、株価収益率とボラティリティとの間には負の相関があることを示唆している。本論文では、外国為替相場においても株式市場と同様な現象が存在するのかどうかに関して、レバレッジ効果を考慮した SV (SV with Leverage；以下、SVL) モデルを用いて実証分析を行なう。

SV モデルや SVL モデルのパラメータは最尤推定することが困難であり、最尤法に代わる推定法が必要になる。この問題に対処するため、多くの先行研究ではマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo；以下、MCMC) 法を用いたベイズ推定を行なっている。SV モデルや SVL モデルでは、モデルを記述するパ

ラメータだけでなく潜在変数 (latent variable) であるボラティリティも同時に事後分布からサンプリングする必要がある。そのためボラティリティは観測個数と同じ個数になるため、効率的にサンプリングすることが重要となる。このような MCMC を用いた SVL モデルのベイズ推定によるリスク資産価格に関する実証研究として、Yu [2005], Omori *et al.* [2007], 大森・渡部 [2008], 石原・大森 [2008], Omori and Watanabe [2008], Takahashi *et al.* [2009], Nakajima and Omori [2010], 中島・大森 [2011] などがある。

これまでの先行研究では、MCMC 法として、Gibbs Sampler や Metropolis-Hasting 法が多く利用されてきた。しかしながら、これらの MCMC 法は、多くの確率変数を一度に推定すると棄却率が小さくなる等の問題点があるため、Takaishi [2008], Takaishi [2009], Takaishi [2013] では、Hybrid Monte Carlo を用いたベイズ推定を行なっている。また、Nugroho and Morimoto [2015] では、ハミルトニアン・モンテカルロ (Hamiltonian Monte Carlo；以下、HMC) 法<sup>2)</sup>によるベイズ推定を行なっている。本論文では、Nugroho and Morimoto [2015] と同様に HMC 法を用いたベイズ推定により SV モデルと SVL モデルのパラメータ推定を行なう<sup>3)</sup>。

実証分析を進めるにあたっては、2015年1月5日から2019年12月30日までのユーロ／米ドル為替レート (Euro/U.S. Dollar exchange rate；以下、EUR/USD)、米ドル／円為替レート (U.S. Dollar/Yen exchange rate；以下、USD/JPY) と2015年1月1日から2019年12月31日までの米ドル指数 (U.S. Dollar Index；以下、DXY)<sup>4)</sup>の日次データを用いて実証的な検証を

行なった。推定された  $\rho$  の事後平均、ならびに95%信用区間から、EUR/USD は収益率とボラティリティとの間に相関はなく、一方、USD/JPY と DXY の収益率とボラティリティの間には負の相関があるという結果となった。したがって、EUR/USD では収益率とボラティリティの間には非対称性が存在しないが、USD/JPY と DXY では非対称性が存在すると考えられる。そのため、株式市場だけでなく外国為替相場にも為替レートによっては、収益率とボラティリティとの間に非対称があることが確認された。また、SV モデルと SVL モデルのベイズ推定では、非効率性因子 (inefficiency factor) の値からハミルトニアン・モンテカルロ法の有効性が示された。

本論文の以下の構成は次の通りである。II. では、本論文で用いた分析モデルである SV モデルと SVL モデルについて説明する。III. では、Leapfrog を用いた HMC 法によるベイズ推定に関して解説を行なう。IV. では、本論文で使用した外国為替相場のデータと実証結果に関して紹介する。V. では、実証結果を踏まえて考察に関して述べる。最後の VI. では、結論と今後の課題について言及する。

## II. SVL モデル

ファイナンスの実証分析で通常用いられる基本的な SV モデルは、収益率  $y_t$  とボラティリティ  $\sigma_t^2 = \exp(h_t/2)$  の過程を  $h_t = \ln \sigma_t^2$  として<sup>5)</sup> 以下のように記述する。

$$y_t = \exp(h_t/2) u_t, \quad (1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi (h_t - \mu) + \eta_t, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \quad (3)$$

ここで、 $u_t$  は平均 0、分散 1、 $\eta_t$  は平均 0、分散  $\sigma_\eta^2$  の正規分布に従う誤差項である。*i.i.d.* は、過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す。 $\mu$  はボラティリティの平均を表し、 $\phi$  はボラティリティのショックの持続性を表すパラメータである。(2)式は、ボラティリティ  $\sigma_t^2$  の対数値が AR(1) プロセス (1 次の自己回帰過程) に従うことを示している。ここでは、前日の外国為替収益率のボラティリティに与える影響を捉えるために、ボラティリティの変動を 1 期先行させたモデルとする。非対称な動きをモデルに与えるには(1)式と(2)式で  $u_t$  と  $\eta_t$  に対して相関関係を考えれば良い。 $u_t$  と  $\eta_t$  とが、相関関係  $\rho$  を持つとして SVL モデルを構築すると、

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \quad (4)$$

となる。(1)–(3)式からなるモデルは SV モデル、また(1), (2), (4)式からなるモデルはレバレッジ効果を含むので SVL モデルとそれぞれ呼ぶこととする。SVL モデル(1), (2), (4)式の未知パラメータ ( $\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu$ ) をまとめて  $\theta$  で表すと、SVL モデルの尤度関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \int \dots \int f(y|h)f(h|\theta) dh \\ &= \int \dots \int \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi} \exp(h_t)} \\ &\quad \exp \left[ -\frac{y_t^2}{2\exp(h_t)} \right] \\ &\quad \times \prod_{t=1}^{T-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2} \sqrt{1-\rho^2}} \\ &\quad \exp \left[ -\frac{|h_{t+1} - \mu - \phi(h_t - \mu) - \rho\sigma_\eta y_t \exp(-h_t/2)|^2}{2\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \right] \\ &\quad \times \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp \left[ -\frac{(1-\phi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma_\eta^2} \right] \\ &\quad dh_1 \dots dh_T \end{aligned} \quad (5)$$

この積分が解析的に解けないため、SVL モデルのパラメータは最尤推定することが難しく、最尤法に代わる推定法が必要になる。本論文では、HMC 法を用いたベイズ推定により SV モデルと SVL モデルのパラメータ推定を行なう。

### Ⅲ. HMC 法によるベイズ推定

Ⅲ. では、HMC 法の基本的な概念を中心とした簡単な紹介を行なう。1. では、HMC 法の定式化において重要な点であるハミルトニアン力学の基本原理解を述べる。2. では、HMC 法による乱数列の発生方法について説明する。3. では、ハミルトンの運動方程式(Hamiltonian's equations of motion) を時間反転性と体積保存を保ったまま数値的に求められる Leapfrog 法について解説する。

#### 1. ハミルトニアン力学

ハミルトニアン力学は、古典力学を再定式化する抽象的な概念として提案されたが、単なる理論の再定式ということ以上に、ハミルトニアン力学の定式化は、統計力学や量子力学の発展に多大な貢献をした。ハミルトン力学では、系の状態は一般化された座標と運動量  $(q_j, p_j)$ ,  $(j=1, \dots, d)$  が張る位相空間の一点に相当し、系の時間発展は位相空間の軌跡で与えられる。この系の時間発展を表す軌跡の方程式がハミルトンの運動方程式、

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (6)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (7)$$

である。 $H$  はハミルトニアンと呼ばれ、系のエネルギーを表し、

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^d \frac{p_j^2}{2m_j} + U(q) \equiv K(p) + U(q) \quad (8)$$

と定義され、 $K(p)$  と  $U(q)$  は系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーをそれぞれ表す。また、 $m_j$  は質点の質量である。

#### 2. HMC 法

$n$  個のデータ  $y = \{y_i\}_{i=1}^n$  が与えられた場合、モデルのパラメータ  $\theta$  のベイズ推定は、以下の式に基づいて行なわれる。

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)f(\theta)}{Z} \quad (9)$$

ここで、 $f(\theta|y)$ ,  $f(y|\theta)$ ,  $f(\theta)$  は、それぞれ事後確率密度関数、尤度関数、事前確率密度関数である。また、 $Z$  は規格化因子を表し、

$$Z = \int_{\Theta} f(y|\theta)f(\theta) d\theta \quad (10)$$

と定義され、周辺尤度とも呼ばれる。事前確率密度関数は過去のデータの情報を基に設定されるが、過去のデータの情報が無い場合は、事前分布の情報が無いことを表す無情報事前分布が用いられる。無情報事前分布を用いた場合、事後分布は尤度関数と同等になる。

事後確率密度関数  $f(\theta|y)$  と、これと独立な標準正規分布、

$$f(p) \equiv \prod_{j=1}^d \exp\left(-\frac{p_j^2}{2m_j}\right) \quad (11)$$

の同時分布は、

$$f(\theta, p|y) = f(\theta|y)f(p) \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 $p = \{p_j\}_{j=1}^d$  と定義され、仮想的な運動量を表す。HMC 法はこの同時分布から乱数を生成する。(12)式の両辺に対数をとると、

$$\log f(\theta, p|y) = \log f(\theta|y) - \sum_{j=1}^d \frac{p_j^2}{2m_j} \quad (13)$$

となる。(13)式の右辺第 1 項をポテンシャル・エ

エネルギー、第2項を運動エネルギーとみなすと、

$$H(\theta, p) = -\log f(\theta|y) + \sum_{j=1}^d \frac{p_j^2}{2m_j} \quad (14)$$

$$= U(\theta) + K(p)$$

となり、事後確率密度関数をハミルトニアンと考えられる。したがって、ハミルトニアンの運動方程式(6)-(7)式より、

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \frac{\partial K(p)}{\partial p_j} = \frac{p_j}{m_j} \quad (15)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_j} = -\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f(\theta|y) \quad (16)$$

となる。(15)-(16)式を解くことで乱数を生成する。

HMC法の特徴は、複数の確率変数を一度に更新できることが可能なことである。モンテカルロ法で用いられるMetropolis法も原理的には複数の確率変数を更新することが可能である。しかし、その場合棄却率が小さくなるため実用上は一度に更新することは困難である。

HMC法による乱数列の発生は以下のステップによって実行される。

1. 新しい乱数の候補  $\theta_{new}$  を乱数で決めた初期値(15)-(16)式のハミルトンの運動方程式から求める。ただし、ハミルトンの運動方程式は解析的には解けないため、Leapfrog法で数値的に求める。
2. 新しい乱数の候補を次の確率で選択する。  
 $r = \min[1, \exp(-H(\theta^*, p^*) + H(\theta, p))] \quad (17)$
3. 上記のステップを繰り返す。

### 3. Leapfrog法

(15)-(16)式のハミルトンの運動方程式は解析的に解けないため、数値的に解く必要がある。HMC法では時間反転性と体積保存を満足する数値積分法を用いる必要があり、それらを満足する数値積分としてLeapfrog法が用いられる。

Leapfrog法で  $\varepsilon$  のステップサイズで(6)-(7)式を差分化した式は、

$$p_j \left( t + \frac{\varepsilon}{2} \right) = p_j(t) - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\partial U(q(t))}{\partial q_i}, \quad (18)$$

$$q_j(t + \varepsilon) = q_j(t) + \varepsilon p_j \left( t + \frac{\varepsilon}{2} \right), \quad (19)$$

$$p_j(t + \varepsilon) = p_j \left( t + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\partial U(q(t + \varepsilon))}{\partial q_i} \quad (20)$$

となる。

未知パラメータ  $\theta$  に加え、潜在変数  $h = (h_1, \dots, h_d)$  も推定されるパラメータとして取り扱う。このポテンシャルエネルギーをLeapfrog法の(18)-(20)式で用いて変数  $q \equiv (\theta, h)$  の新しい値を求め、(17)式の棄却率を用いて新しい変数の更新を行なう。

## IV. データと実証結果

### 1. データ

本論文では、外国為替相場のデータとして、東京外国為替市場における17:00時の銀行間直物のEUR/USD、USD/JPY<sup>6)</sup>とDXY<sup>7)</sup>の日次データを用いた。EUR/USDとUSD/JPYのデータの観測期間は、2015年1月5日から2019年12月30日までであり、DXYのデータの観測期間は2015年1月1日から2019年12月31日までである。収益率  $y_t$  は、 $t$  時点の為替レートを  $P_t$  とするとき、 $y_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100(\%)$  として計算を行なった。EUR/USDとUSD/JPYの日次収益率の観測期間は、2015年1月6日から2019年12月30日までであり、DXYの日次収益率の観測期間は2015年1月2日から2019年12月31日までである。観測個数はEUR/USDとUSD/JPYが1225であり、DXYが1304である。

図表1 EUR/USD, USD/JPY, DXY の日次収益率の要約統計量

	観測個数	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	最大値	最小値
EUR/USD	1225	-0.0054	0.5192	0.2001	2.7767	3.0724	-2.0198
USD/JPY	1225	-0.0080	0.5393	-0.3429	2.4064	2.2784	-2.5547
DXY	1304	0.0050	0.4264	-0.0730	2.0362	2.0310	-2.4008

(注) EUR/USD と USD/JPY の観測期間は、2015年1月6日から2019年12月30日までであり、DXY の日次収益率の観測期間は2015年1月2日から2019年12月31日までである。

データの要約統計量は、図表1に纏められている。

EUR/USD の収益率の歪度については正の値となっており、EUR/USD の収益率の分布は右に歪んだ分布に従っている。USD/JPY と DXY の収益率の歪度については負の値となっており、これらの収益率の分布は左に歪んだ分布に従っている。また、EUR/USD, USD/JPY, DXY の収益率の超過尖度については、全ての為替レートに関して0を超えていることから、これらの収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことが分かる。したがって、EUR/USD の収益率は、正規分布よりも裾が厚く、右に歪んだ分布に従っており、USD/JPY と DXY の収益率は、正規分布よりも裾が厚く、左に歪んだ分布に従っていることが分かる。

## 2. 実証分析

### (1) HMC 法による計算

HMC 法によるベイズ推定においては、稼働検査期間として最初の10,000個を捨てた後、100,000個の確率標本を発生させ、MCMC の標本の独立性を担保するため標本の抽出は5つおきに合計20,000個の結果を用いた。また、同時に走らせる MCMC の数 (チェーン数) は3とした。なお、本論文における数値計算は全てC言語を用いている。

図表2にHMC法でサンプリングしたパラ

図表2  $\theta$  と  $h$  の採択確率

	SV モデル		SVL モデル	
	$\theta$	$h$	$\theta$	$h$
EUR/USD	75.7%	99.8%	78.2%	99.9%
USD/JPY	88.0%	99.9%	94.9%	99.9%
DXY	96.9%	99.8%	99.2%	99.9%

メータ  $\theta$  とボラティリティの対数値  $h$  の採択確率を示す。図表2から、日経225先物や TOPIX 先物のような株価指数の場合<sup>8)</sup>と異なり、パラメータ  $\theta = (\phi, \sigma_{\eta}, \rho, \mu)$  の採択確率は高くないことが分かる。特に、USD/JPY や DXY に比べ EUR/USD のパラメータ  $\theta$  の採択率は、SV モデルで75.7%、また、SVL モデルで78.2%と低いことが分かる<sup>9)</sup>。

HMC 法の運動方程式の数値解は Leapfrog 法により求められる。Leapfrog 法には2つの任意パラメータ ( $\varepsilon, \tau$ ) があり、 $\varepsilon$  は仮想的な微小時間を、また、 $\tau$  は時間ステップの回数をそれぞれ表す。これらの値の整合性は、パラメータの採択確率、事後自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数等から判断される。経験上、 $\varepsilon$  は小さく、 $\tau$  を大きくすると標本経路が状態空間を万遍なく十分に訪れると考えられている。潜在変数  $h$  とパラメータ  $\theta$  をアップデートする際に用いる任意パラメータ ( $\varepsilon, \tau$ ) には、(0.05, 1000) と (0.01, 5000) を用いた。

(2) 収束判定

HMC法の妥当性を調べるために、サンプリングによって得られた値が、ある事後分布に収束しているかどうかを判断する必要がある。収束を判断するにはいくつかの方法があるが、本論文ではサンプリングしたパラメータの標本自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数の目視による判定と、Gelman-Rubin統計量を併用しての判定を行なう。Gelman-Rubin統計量が1に近い場合、連鎖が定常状態に収束していると判断できる<sup>10)</sup>。

3. 推定結果

(1) EUR/USDの推定結果

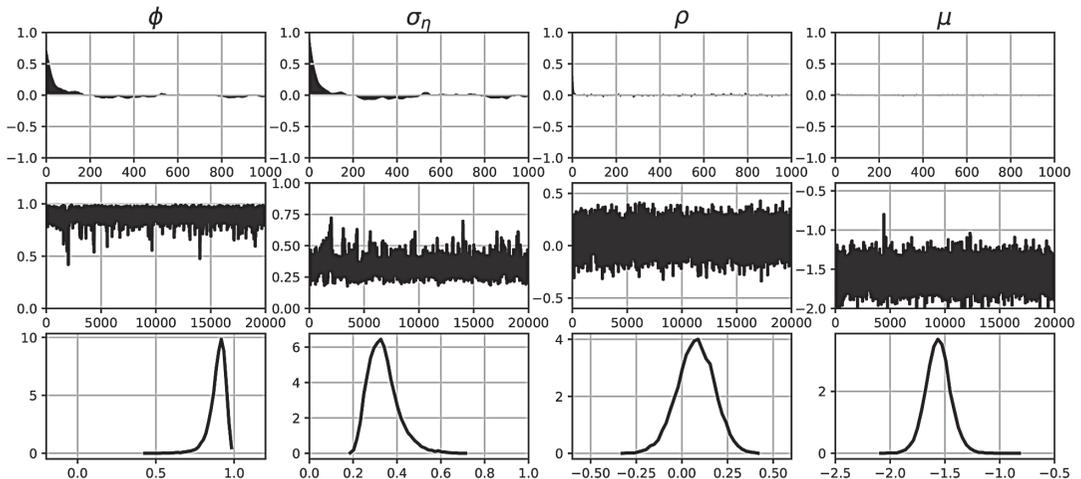
図表3にEUR/USDによる標本自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数を示す。また、図表4にSVモデルとSVLモデルの各パラメータのGelman-Rubin統計量を示す。図表3の標本自己相関関数より、いずれのパラメータにおいても十分に減衰していることが分かる。これよりHMC法によりサンプリングされたパラメータの定常分布への収束は十分に速

いと言える。また、いずれのパラメータの標本経路も安定した動きで十分に状態空間全体を推移していると見なし得ることから、定常分布に収束していると考えられる。さらに、図表4からSVモデルとSVLモデルのいずれのパラメータのGelman-Rubin統計量もほぼ1に近い値であることが分かる。したがって、得られた標本系列は不変分布に十分収束していると言える。

図表5にEUR/USDの日次収益率を用いたSVモデルとSVLモデルの推定結果を示す。最初に、ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータ $\phi$ について検証する。図表5からSVモデルとSVLモデルの $\phi$ の事後平均はそれぞれ0.8967と0.8929であり、これらが1に近いことからボラティリティに対するショックが高い持続性を持つことが分かる。この結果は過去の研究<sup>11)</sup>と整合的な結果となっている。

次に、EUR/USDの日次収益率とボラティリティとの間の相関を表すパラメータである $\rho$ について検証する。 $\rho$ の事後分布は0.0740と

図表3 EUR/USDを用いたSVLモデルの推定結果



(注) 標本自己相関関数 (上段)、標本経路 (中段)、事後確率密度関数 (下段)。

図表 4 EUR/USD の Gelman-Rubin 統計量

	$\phi$	$\sigma_{\eta}$	$\rho$	$\mu$
SV	1.0010	1.0018		1.0000
SVL	1.0005	1.0005	1.0001	1.0000

図表 5 EUR/USD の日次収益率を用いた推定結果

パラメータ	SV	SVL
$\phi$	0.8967 (0.05)	0.8929 (0.0542)
	[0.7762, 0.9669]	[0.7591, 0.9655]
	22.2	25.5
$\sigma_{\eta}$	0.3358 (0.0681)	0.3394 (0.0713)
	[0.2282, 0.4940]	[0.2334, 0.5123]
	29.5	26.1
$\rho$		0.0740 (0.1011)
		[-0.1293, 0.2676]
		7.4
$\mu$	-1.5642 (0.1147)	-1.5617 (0.1135)
	[-1.7895, -1.3346]	[-1.7832, -1.3339]
	3.5	3.3
対数周辺尤度	1109.72	1112.82

(注) 1行目：事後平均および事後標準偏差，2行目：95%信用区間，3行目：非効率因子。

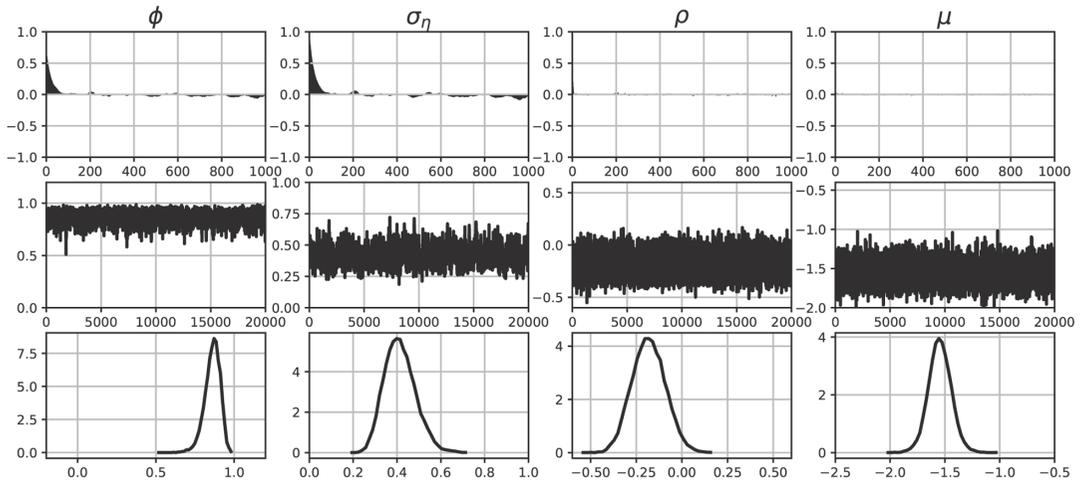
0に近い値であり、さらに、その95%信用区間は  $[-0.1293, 0.2676]$  と0を含む区間である。このことから、EUR/USDの日次収益率とボラティリティの対数値との間にはほぼ相関がないと考えられる。次に、HMC法の非効率性因子の値はあまり大きくなく、最も大きい $\sigma_{\eta}$ であっても30程度であり、この結果は先行研究<sup>12)</sup>と整合的である。最後に、SVモデルとSVLモデルの推定された対数周辺尤度<sup>13)</sup>はそれぞれ1109.72と1112.82であり、SVLモデルの対数周辺尤度がSVモデルのそれよりも大きいことが分かる。したがって、EUR/USDの日次収益率に対してはSVLモデルの方があてはまりが優れているモデルであると考えられる。

## (2) USD/JPYの推定結果

図表6にUSD/JPYによる標本自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数を示す。また、図表7にSVモデルとSVLモデルの各パラメータのGelman-Rubin統計量を示す。図表6から標本自己相関関数の収束性や標本経路の傾向等は、EUR/USDと同様の振る舞いを示していることが分かる。さらに、図表7からSVモデルとSVLモデルのいずれのパラメータのGelman-Rubin統計量もほぼ1に近い値であることが分かる。したがって、EUR/USDと同様に得られた標本系列は不変分布に十分収束していると言える。

図表8にUSD/JPYの日次収益率を用いたSVモデルとSVLモデルの推定結果を示す。

図表6 USD/JPYを用いたSVLモデルの推定結果



(注) 標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度関数 (下段)。

図表7 USD/JPYのGelman-Rubin統計量

	$\phi$	$\sigma_\eta$	$\rho$	$\mu$
SV	1.0030	1.0044		1.0001
SVL	1.0002	1.0006	1.0000	1.0000

図表8 USD/JPYの日次収益率を用いた推定結果

パラメータ	SV	SVL
$\phi$	0.8686 (0.0508) [0.7531, 0.9513] 27.2	0.8608 (0.0492) [0.7727, 0.9320] 11.7
$\sigma_\eta$	0.4023 (0.0728) [0.2786, 0.5634] 37.2	0.4129 (0.0705) [0.3070, 0.5370] 21.0
$\rho$		-0.1806 (0.0912) [-0.3272, -0.0275] 8.5
$\mu$	-1.5435 (0.1091) [-1.7569, -1.3242] 4.2	-1.5463 (0.1039) [-1.7136, -1.3758] 2.8
対数周辺尤度	1361.95	1375.76

(注) 1行目: 事後平均および事後標準偏差, 2行目: 95%信用区間, 3行目: 非効率因子。

EUR/USD と同様に  $\phi$  と  $\rho$  の推定結果について検証する。図表8からSVモデルとSVLモデルの  $\phi$  の事後平均はそれぞれ0.8686と0.8608であり、これらは1に近いことから、USD/JPYもEUR/USDと同様にボラティリティのショックが高い持続性を持つことが分かる。 $\rho$  の事後分布は-0.1806と負の値であり、さらに、95%信用区間も  $[-0.3272, -0.0275]$  であることから  $\rho$  が負である事後確率は95%より大きいと言える。したがって、 $\rho$  が負であることから、USD/JPYの日次収益率とボラティリティの対数値との間には負の相関があると考えられる。

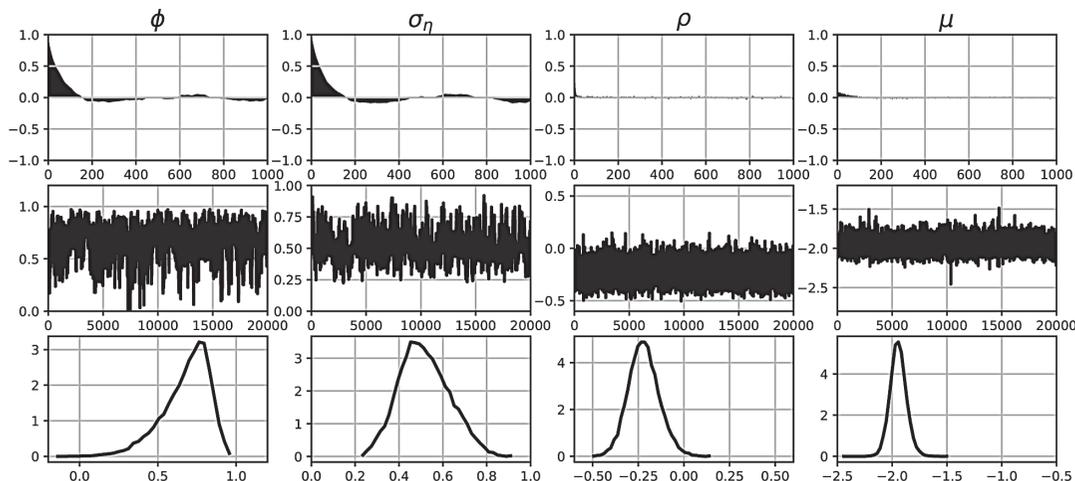
非効率性因子の値は、EUR/USDと同様にあまり大きくなく、最も大きい  $\sigma_\eta$  であっても38以下である。最後に、SVモデルとSVLモデルの推定された対数周辺尤度はそれぞれ1361.95と1375.76であり、SVLモデルの対数周辺尤度がSVモデルのそれよりも大きいことが分かる。したがって、USD/JPYの日次収益率に対してはSVLモデルの方があてはまりが優れているモデルであると考えられる。

### (3) DXYの推定結果

図表9にDXYによる標本自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数を示す。また、図表10にSVモデルとSVLモデルの各パラメータのGelman-Rubin統計量を示す。図表9から標本自己相関関数の収束性や標本経路の傾向等を示していることが分かる。さらに、図表10からSVモデルとSVLモデルのいずれのパラメータのGelman-Rubin統計量もほぼ1に近い値であることが分かる。したがって、EUR/USDやUSD/JPYと同様に得られた標本系列は不変分布に十分収束していると言える。

図表11にDXYの日次収益率を用いたSVモデルとSVLモデルの推定結果を示す。図表11からSVモデルとSVLモデルの  $\phi$  の事後平均はそれぞれ0.7785と0.6869である。これらの値は1よりも十分小さく、USD/JPYやEUR/USDとは異なりボラティリティのショックが高い持続性を持つとは言えない。 $\rho$  の事後分布は-0.2191と負の値であり、さらに、95%信用区間も  $[-0.3795, -0.0437]$  であることから  $\rho$

図表9 DXYを用いたSVLモデルの推定結果



(注) 標本自己相関関数(上段)、標本経路(中段)、事後確率密度関数(下段)。

図表10 DXY の Gelman-Rubin 統計量

	$\phi$	$\sigma_{\eta}$	$\rho$	$\mu$
SV	1.0020	1.0015		1.0001
SVL	1.0014	1.0017	1.0001	1.0003

図表11 DXY の日次収益率を用いた推定結果

パラメータ	SV	SVL
$\phi$	0.7785 (0.1258)	0.6869 (0.1486)
	[0.4430, 0.9294]	[0.3247, 0.8983]
	71.1	56.6
$\sigma_{\eta}$	0.4244 (0.1023)	0.5092 (0.1132)
	[0.2698, 0.6718]	[0.3084, 0.7434]
	72.8	54.5
$\rho$		-0.2191 (0.0852)
		[-0.3795, -0.0437]
		12.1
$\mu$	-1.9296 (0.0852)	-1.9420 (0.0754)
	[-2.0940, -1.7555]	[-2.0844, -1.7874]
	7.6	7.9
対数周辺尤度	1224.98	1420.76

(注) 1行目：事後平均および事後標準偏差，2行目：95%信用区間，3行目：非効率因子。

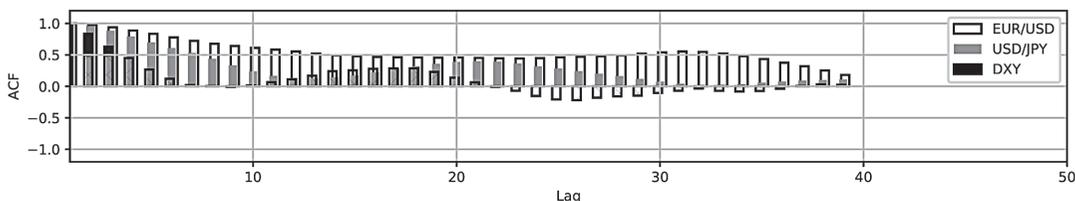
が負である事後確率は95%より大きいと言える。したがって、 $\rho$  が負であることから、USD/JPY の日次収益率とボラティリティの対数値との間には負の相関があると考えられる。

次に、非効率性因子の値は、EUR/USD や USD/JPY と比べると大きな値となっており、最も大きい  $\sigma_{\eta}$  では72.8である。最後に、SV モデルと SVL モデルの推定された対数周辺尤度はそれぞれ1224.98と1420.76であり、SVL モデルの対数周辺尤度がSV モデルのそれよりも大きいことが分かる。したがって、DXY の日次収益率に対してはSVL モデルの方があてはまりが優れているモデルであると考えられる。

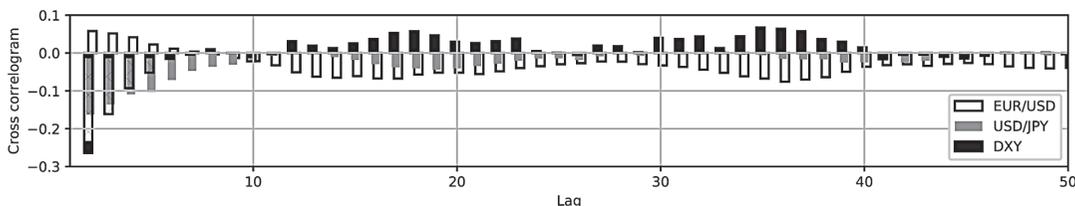
## V. 考察

EUR/USD, USD/JPY, DXY を用いた SVL モデルの推定されたパラメータ  $\phi$  の事後平均は、それぞれ0.8929, 0.8608, 0.6869であった。EUR/USD, USD/JPY による値に比べ、DXY での値は小さいことが分かる。一方、SVL モデルでは、パラメータ  $\theta$  に加え、ボラティリティの対数値  $h$  も潜在変数として推定している。パラメータの値とボラティリティのショックの持続性の関係を検証するために、ボラティリティの対数値  $h$  の自己相関関数 (Autocorrelation function; 以下, ACF) を図表12に示す。

図表12 EUR/USD, USD/JPY, DXY のボラティリティの対数値  $h$  の ACF (2015/1/6 - 2019/12/30)



図表13 EUR/USD, USD/JPY, DXY のボラティリティの対数値  $h$  の相互相関係数 (2015/1/6 - 2019/12/30)



図表12から、次のことが分かる。EUR/USD の減衰が最も遅く、ラグが40でも相関があることが分かる。一方、USD/JPA の減衰はラグ15程度、DXY の減衰はラグ5程度と短い日数で減衰していることが分かる。この減衰の様子は、EUR/USD, USD/JPY, DXY のそれぞれの  $\phi$  の値の大きさと整合的である。したがって、 $\phi$  の事後平均によるボラティリティに対するショックの持続性が高いという結果とボラティリティの対数値  $h$  の ACF から得られた  $h$  が長期記憶性を持つという結果は整合していることから、ボラティリティの対数値  $h$  の推定も十分良い結果であると考えられる。

EUR/USD, USD/JPY, DXY を用いた SVL モデルの推定された  $\rho$  の事後平均、ならびに 95% 信用区間から、EUR/USD は収益率とボラティリティとの間に相関はなく、一方、USD/JPY と DXY の収益率とボラティリティの間には負の相関があると考えられる。さらに、EUR/USD, USD/JPY, DXY の日次収益率とボラティリティの対数値との関係調べるために、図表13に EUR/USD, USD/JPY, DXY の

日次収益率と推定されたボラティリティの対数値  $h$  の相互相関関数を示す。

図表13から、ラグが1から10の間で次のことが分かる。EUR/USD の場合、相互相関係数<sup>14)</sup>は正の値であるが、最も大きな相互相関係数の値は0.0580と小さい。一方、USD/JPY と DXY の場合、相互相関係数は負の値であり、最も大きな相互相関係数は、USD/JPY が  $-0.1626$ 、DXY が  $-0.2642$  である。また、ラグが大きくなると相互相関係数が小さくなることが分かる。この結果は、推定されたパラメータ  $\phi$  と整合的である。USD/JPY と DXY のグラフの違いを定量的に比較するために、収益率とボラティリティとの相互相関を次の関数で近似することを考える。

$$L(l) = -A \exp\left(-\frac{l}{T}\right) \quad (21)$$

ここで、 $l$  はラグ、 $T$  は減衰時間、また、 $A$  は振幅（相関の強さ）をそれぞれ表す。これらのパラメータは、最小二乗法を用いてラグが1から14の範囲で求めた。USD/JPY と DXY の  $(\tau, A)$  はそれぞれ  $(4.06, 0.22)$  と  $(1.74,$

0.48) である。これより、USD/JPYはDXYに比べ相関は弱いが減衰は遅いことが分かる。

## VI. 結論と今後の課題

本論文では、HMC法を用いてEUR/USD、USD/JPY、DXYの日次収益率データに対し、SVLモデルを使用してベイズ推定による実証分析を行なった。EUR/USDでは収益率とボラティリティとの間には非対称性が存在しないが、USD/JPYとDXYでは非対称性が存在するという結果となった。また、HMC法を用いたSVLモデルのパラメータの推定結果は、先行研究と整合的であることが分かった。また、HMC法を用いてのSVLモデルによるベイズ推定は有効であることが明らかになった。さらに、MCMC法の効率性を示す非効率性因子から、HMC法が他のMCMC法と比較しても十分有効であることも検証された。

今後の課題としては、外国為替相場の収益率の分布は正規分布よりも裾が厚く非対称な分布に従っているため、誤差項には $t$ 分布<sup>15)</sup>や非対称 $t$ 分布等<sup>16)</sup>を用いて分析を行なうことである。また、Takahashi *et al.* [2009] が提案しているRealized Volatility (RV)を取り入れたRealized SVモデル<sup>17)</sup>やMarkov Switchingモデル<sup>18)</sup>、多変量SVモデル<sup>19)</sup>を利用した実証研究が望まれる。HMC法の観点からは、計算精度と計算の収束性の向上<sup>20)</sup>が挙げられる。計算精度の向上に関しては、Leapfrog法における数値計算のパラメータ（更新回数と更新の大きさ）を自動的に決定するNo-U-Turnアルゴリズム<sup>21)</sup>や、これを基に更新回数を学習アルゴリズムにより決定するアルゴリズム<sup>22)</sup>等が提唱されている。また、計算の収束性を改良する試み

として、高次元パラメータ空間のリーマン幾何学を活用し効率的なサンプリングを行なえるリーマン多様体HMC法 (Riemann Manifold HMC; RMHMC)<sup>23)</sup>や、これを拡張した修正コレスキーリーマン多様体HMC<sup>24)</sup>等が提唱されている。これらの方法について今後検討する必要があると考えられる。

### 注

- 1) SVモデルとその発展に関して詳しくは、Ghysels *et al.* [1996], Shephard (ed.) [2005], 渡部 [2005] を参照。
- 2) HMC法は、Duane *et al.* [1987] によって素粒子物理学の格子QCD (Quantum Chromo Dynamics) 計算においてゲージ配置を効率よく生成する方法として考案された。その後、時系列データにおける確率過程のパラメータ推定に応用されることとなった。詳しくは、Takaishi [2013], Nugroho and Morimoto [2015], 豊田 (編著) [2015] 第5章を参照。
- 3) 戸塚・三井 [2020a], 戸塚・三井 [2020b] では、日経225先物とTOPIX先物のデータを使用して同様の実証研究を行なっている。
- 4) 米ドルの価値に対して6種類の世界的な主要通貨を次の比率で構成して指数化したものである。ユーロ (EUR)・57.6%, 円 (JPY)・13.6%, 英ポンド (GBP)・11.9%, カナダドル (CAD)・9.1%, スウェーデンクローネ (SEK)・4.2%, スイスフラン (CHF)・3.6%である。
- 5) ボラティリティ $\sigma_t^2$ が負にならないようにするためである。
- 6) EUR/USD, USD/JPYのデータは、日経NEEDS-FinancialQuestより取得した。
- 7) DXYのデータは、Bloombergより取得した。
- 8) 詳しくは、戸塚・三井 [2020a], 戸塚・三井 [2020b] を参照。
- 9) ここでの採択確率には注意が必要である。
- 10) 詳しくは、Gelman and Rubin [1992], Gelman [1996] を参照。
- 11) Jacquier *et al.* [1994] は、それまでのSVモデルを推定した文献をサーベイし、 $\phi$ の推定値には0.8から0.995までの値が得られているとしている。
- 12) 例として、大森・渡部 [2008] を参照。
- 13) 詳しくは、Newton and Raftery [1994] を参照。
- 14) 相互相関係数を、時刻 $t$ の収益率と時刻 $t+1$ のボラティリティの対数値との間の相関係数として定義する。
- 15)  $t$ 分布以外にも一般化誤差分布 (Generalized Error Distribution: GED) や一般化 $t$ 分布 (Generalized  $t$  Distribution) などが考えられる。
- 16) 例えば、Nakajima and Omori [2010], 中島・大森 [2011] では、SVLモデルの誤差項の分布として一般化双曲型非対称 $t$ 分布 (generalized hyperbolic skewed student  $t$  distribution) を適用してMCMCにより実証分析を行なっている。

- 17) 詳しくは、大森・渡部 [2013] を参照。
- 18) Markov Switching を含んだ SV モデルの MCMC を用いたベイズ推定による実証研究としては、Shibata and Watanabe [2005], 里吉 [2005] を参照。
- 19) 多変量 SV モデルのサーベイとして詳しくは、大森 [2019] を参照。
- 20) 収束とは定常分布へ達することを指し、計算の収束性の向上とは稼働検査期間の短縮を意味する。
- 21) 詳しくは、Hoffman and Gelman [2014] を参照。
- 22) 詳しくは、Wu *et al.* [2019] を参照。
- 23) 詳しくは、Girolami and Calderhead [2011] を参照。
- 24) 詳しくは、Kleppe [2018] を参照。

## 参 考 文 献

- 石原庸博・大森裕浩 [2008] 「TOPIX 収益率のマルコフ・スイッチング非対称確率的ボラティリティ変動モデルによる分析」MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』No.24, 75-100頁。
- 大森裕浩 [2019] 「多変量ボラティリティモデルのベイズ推定」日本統計学会『日本統計学会誌』第48巻, 第2号, 177-198頁。
- 大森裕浩・渡部敏明 [2008] 「MCMC 法とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」国友直人・山本拓 (編)『21世紀の統計科学 I 社会・経済と統計科学』東京大学出版会, 第9章, 223-266頁。
- 大森裕浩・渡部敏明 [2013] 「Realized Stochastic Volatility モデル—マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ分析—」日本統計学会『日本統計学会誌』第42巻, 第2号, 273-303頁。
- 里吉清隆 [2005] 「マルコフ・スイッチングを含む確率的ボラティリティ変動モデル」和合肇 (編著)『ベイズ計量経済分析』, 第12章, 355-379頁。
- 戸塚英臣・三井秀俊 [2020a] 「ハミルトニアン・モンテカルロ法による非対称 SV モデルの推定—日経225先物, TOPIX 先物— (第1回)」日本取引所グループ『先物・オプションレポート』Vol.32, No.2, 1-6頁。
- 戸塚英臣・三井秀俊 [2020b] 「ハミルトニアン・モンテカルロ法による非対称 SV モデルの推定—日経225先物, TOPIX 先物— (第2回)」日本取引所グループ『先物・オプションレポート』Vol.32, No.3, 1-8頁。
- 豊田秀樹 (編著) [2015] 『基礎からのベイズ統計学—ハミルトニアンモンテカルロ法による実践的入門—』朝倉書店。
- 中島上智・大森裕浩 [2011] 「一般化双曲線非対称  $t$  分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用」日本統計学会『日本統計学会誌』第40巻, 第2号, 61-88頁。
- 渡部敏明 [2005] 「確率的ボラティリティ変動モデル：分析法とモデルの発展」日本大学経済学部経済科学研究所『紀要』第35号, 111-133頁。
- Duane, S., Kennedy, A. D., Pendleton, B. J. and Roweth, D. [1987] “Hybrid Monte Carlo,” *Physics Letters B*, Vol.195, No.2, pp.216-222.
- Gelman, A. [1996] “Inference and Monitoring Convergence,” in Gilks, W. R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D. J. eds., *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, pp.131-143, Chapman & Hall.
- Gelman, A. and Rubin, D. B. [1992] “Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences (with discussion),” *Statistical Science*, Vol.7, No.4, pp.457-511.
- Ghysels, E., Harvey, A. C. and Renault, E. [1996] “Stochastic Volatility,” in Maddala, G. S. and Rao, C. R. eds., *Handbook of Statistics*, Vol.14: Statistical Methods in Finance, pp.119-191, North-Holland : 小暮厚之・森平爽一郎 (監訳) [2004], 『ファイナンス統計学ハンドブック』, pp.117-189, 朝倉書店。
- Girolami, M. and Calderhead, B. [2011] “Riemann Manifold Langevin and Hamiltonian Monte Carlo Methods,” *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 73, pp.873-889.
- Hoffmani, M. D. and Gelman, A. [2014] “The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo,” *Journal of Machine*

- Learning Research*, Vol.15, pp.1593-1623.
- Jacquier, E., Polson, N. and Rossi, P. [1994] "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models (with Discussion)," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol.12, pp.371-417.
- Kleppe, T. S. [2018] "Modified Cholesky Riemann Manifold Hamiltonian Monte Carlo: Exploiting Sparsity for Fast Sampling of High-dimensional Targets," *Statistics and Computing*, Vol.28, pp.795-817.
- Nakajima, J. and Omori, Y. [2012] "Stochastic Volatility Model with Leverage and Asymmetrically Heavy Tailed Error Using GH Skew Student's *t*-Distribution," *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol.56, No.11, pp.3690-3704.
- Newton, M. A. and Raftery, A. E. [1994] "Approximate Bayesian Inference by the Weighted Likelihood Bootstrap," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 56, pp.3-26.
- Nugroho, D. B. and Morimoto, T. [2015] "Estimation of Realized Stochastic Volatility Models Using Hamiltonian Monte Carlo-Based Methods," *Computational Statistics*, Vol.30, No.2, pp.491-516.
- Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. and Nakajima, J. [2007] "Stochastic Volatility with Leverage: Fast Likelihood Inference," *Journal of Econometrics*, Vol.140, No.2, pp.425-449.
- Omori, Y. and Watanabe, T. [2008] "Block Sampler and Posterior Mode Estimation for Asymmetric Stochastic Volatility Models," *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol.52, No.6, pp.2892-2910.
- Shephard, N. (ed.) [2005] *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford University Press.
- Shibata, M. and Watanabe, T. [2005] "Bayesian Analysis of a Markov Switching Stochastic Volatility Model," *Journal of the Japan Statistical Society*, Vol.35, No.2, pp.205-219.
- Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. [2009] "Estimating Stochastic Volatility Models Using Daily Returns and Realized Volatility Simultaneously," *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol.53, No.6, pp.2404-2426.
- Takaishi, T. [2008] "Financial Time Series Analysis of SV Model by Hybrid Monte Carlo," *Lecture Notes in Computer Science*, 5226, pp.929-936.
- Takaishi, T. [2009] "Bayesian Inference of Stochastic Volatility Model by Hybrid Monte Carlo," *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, Vol.18, No.08, pp.1381-1396.
- Takaishi, T. [2013] "Empirical Analysis of Stochastic Volatility Model by Hybrid Monte Carlo Algorithm," *Journal of Physics: Conference Series*, 423(1), 012021.
- Wu, C., Stoehr, J. and Robert, C. P. [2019] "Faster Hamiltonian Monte Carlo by Learning Leapfrog Scale," *arXiv: stat/1810.04449*.
- Yu, J. [2005] "On Leverage in a Stochastic Volatility Model," *Journal of Econometrics*, Vol.127, No.2, pp.165-178.
- 戸塚英臣 (日本大学経済学部専任講師)  
三井秀俊 (日本大学経済学部教授)