

日経平均株価のトレンドとオプション評価

——Markov Switching EGARCH モデルによる分析——

里 吉 清 隆
三 井 秀 俊

要 旨

本論文では、Markov Switching モデルとそれを拡張した Markov Switching EGARCH モデルを用いて日経平均株価について分析を行い、さらに、これらのモデルが日経225オプション価格の評価に関してどの程度有効であるかを検証している。一般に Markov Switching モデルによる資産価格の分析では、収益率の平均とボラティリティは同時にスイッチングを起こすと仮定することが多いが、本論文ではそれぞれ独立に変化するモデルや、片方のみが変化するモデルを提案して、モデルの比較を行った。実証分析の結果、日経平均株価の価格トレンドは、平均のみがスイッチングを起こす Markov Switching EGARCH モデルによって識別できることが明らかになった。また、コール・オプション価格に関する分析では、Markov Switching モデルよりも Markov Switching EGARCH モデルのパフォーマンスが全体として高く、スイッチングはボラティリティに関しては重要であるが、平均のスイッチングは特に重要ではないことが示された。

目 次

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| I. はじめに | IV. 実証結果 |
| II. 分析モデル | 1. データ |
| 1. Markov Switching モデル | 2. Markov Switching モデルの推定結果 |
| 2. Markov Switching EGARCH モデル | 3. Markov Switching EGARCH モデルの推定結果 |
| III. オプション価格の導出方法 | 4. オプション価格の推定値の比較 |
| 1. リスク中立性の下でのオプション価格 | V. 結論と今後の課題 |
| 2. モンテカルロ・シミュレーションの手順 | |

I. はじめに

株式市場や外国為替市場などの金融市場で

は、しばしば長期的あるいは短期的に一定方向の価格の推移が観察され、上昇トレンドの局面はブル市場 (bull market)、下降トレンドの局面はベア市場 (bear market) と呼ばれてい

る。投資家にとってはトレンドの識別、また転換点の見極めは非常に重要であり、これまで様々なトレンド分析手法が生み出されてきた。一般に投資家の間では、トレンドを把握するために移動平均やトレンドラインといった、いわゆるテクニカル分析が頻繁に利用されている。その一方で、計量経済学においては時系列モデルの一つである Markov Switching モデルによるトレンド識別法が考案され、Schaller and Norden [1997], Maheu and McCurdy [2000] が代表的な研究として知られている。また、大鋸・大屋 [2009], Shibata [2012], 三井 [2014a] は日本の株式市場について、Isogai *et al.* [2008] は日本を含めた世界の株式市場についてトレンドの分析を行っている。

ところで、資産価格のボラティリティは市場の状況に応じて大きく変動しており、収益率の分布は正規分布に比べて裾が厚いことが知られている。このような時系列データは、通常、GARCH (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルや確率的ボラティリティ変動 (stochastic volatility) モデルなどで定式化されることが多い。また、収益率の分布は歪んでいて、左右非対称であるとも言われている。この現象を捉えるには、例えば、平均が異なる分布から構成される混合分布による定式化が考えられ、里吉・三井 [2013] では混合正規分布と混合 t 分布を用いて、日経平均株価の分析を行っている。このような分布の歪みについては、Markov Switching モデルによっても表現することができる¹⁾。

本論文の目的は大きく分けて2つあり、第1の目的は、Markov Switching モデルによって資産価格のトレンドを捉えることは可能なかどうか、また、そのためにはボラティリティの

変動をどのように定式化すれば良いのかを明らかにすることである。分析の対象としている日経平均株価などの株価指数については、価格が上昇した翌日のボラティリティよりも下落した翌日のボラティリティの方が高くなる傾向があることが知られており、ボラティリティの非対称性、またはレバレッジ効果と呼ばれている。この現象を考慮して、ボラティリティの変動を捉えるモデルとしては exponential GARCH (EGARCH) モデルを採用し、Markov Switching モデルと組み合わせた Markov Switching EGARCH モデルを用いることにする。また、一般的に Markov Switching モデルによる資産価格の分析では、収益率の平均とボラティリティは同時にスイッチングを起こすと仮定することが多い。しかし、本論文ではそれぞれ独立に変化するモデルや、片方のみが変化するモデルを提案して、モデルの比較を行うことにする。

第2の目的は、これらのモデルが日経225オプション価格の評価においてどの程度有効であるかを検証することである。ボラティリティの変動を考慮した ARCH 型モデルによるオプション価格に関する実証的な研究で、代表的なものとしては、Engle and Mustafa [1992], Noh *et al.* [1994], Saez [1997], Sabbatini and Linton [1998], Bauwens and Lubrano [1998], Duan and Zhang [2001], Bauwens and Lubrano [2002], Christoffersen and Jacobs [2004], Christoffersen *et al.* [2006], Badescu *et al.* [2008], Alexander and Lazar [2009] がある。日経225オプションについては、森保 [1999], 三井 [2000], 三井・渡部 [2003], 渡部 [2003], 竹内 [2006], 竹内 (野木 森)・渡部 [2008], Satoyoshi and Mitsui

[2011] があり, Watanabe and Ubukata [2014] においては, 日次データだけでなく, 高頻度データから得られた Realized Volatility を利用して分析を行っている²⁾。また, 里吉・三井 [2013] では, 収益率の分布の歪みを表現できるモデルとして混合正規分布と EGARCH モデルを組み合わせた混合正規 EGARCH モデルを提案し, コール・オプションの評価において有効であるとの結果を示している。

Markov Switching EGARCH モデルを用いたオプション価格の実証分析については, 里吉・三井 [2011] においても行われているが, いくつかの問題点がある。第1に, パラメータのスイッチングは平均とボラティリティの双方に導入されてはいるが, 平均のみをスイッチングさせた場合については分析を行っていないため, スwitchングを導入したときの効果が十分には明らかになっていない。第2に, オプション価格の評価において投資家はリスク中立的と仮定しているのにもかかわらず, 実際の無リスク金利のデータを使用していないばかりでなく, ベア市場において無リスク金利がマイナスとなってしまう, 非現実的である。第3に, データ期間が2010年1月限月までであり, 最近のオプション市場について検証し直す必要がある。里吉・三井 [2011] では, コール・オプションについては GARCH モデルよりも EGARCH モデルのほうがパフォーマンスが優れているという結果を示している。よって, 本論文では GARCH モデルについては割愛し, EGARCH モデルをベースとしたモデルで分析を行うことにした。

実証分析の結果, 日経平均株価の価格トレンドを捉えるモデルとしては, 平均のみがスイッチングを起こす Markov Switching EGARCH

モデルで十分であり, ボラティリティのスイッチングをモデルに含める必要は無いことが明らかになった。一方, コール・オプション価格に関する分析では, Markov Switching モデルに比べて Markov Switching EGARCH モデルのパフォーマンスが全体として高く, スwitchングはボラティリティに関しては重要であるが, ブル・ベア局面を識別するための平均のスイッチングは特に必要ではないことが示された。

本論文の以下の構成は次の通りである。Ⅱ. では, Markov Switching モデルと投資家のリスク中立性について解説し, ボラティリティの変動を EGARCH モデルに拡張した Markov Switching EGARCH モデルを提案する。Ⅲ. では, モンテカルロ・シミュレーションによるヨーロッパ・オプションの評価法を説明する。実証分析の結果はⅣ. にまとめた。Ⅴ. は結論と今後の課題である。

Ⅱ. 分析モデル

1. Markov Switching モデル

原資産の収益率を R_t とする。平均とボラティリティが独立に変化する Markov Switching モデルは次のように表される。

$$R_t = \mu_{\Delta_{1,t}} + \sqrt{\sigma_{\Delta_{2,t}}^2} z_t, \quad z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, V[z_t] = 1, \quad (1)$$

$$\mu_{\Delta_{1,t}} = \mu_0(1 - \Delta_{1,t}) + \mu_1 \Delta_{1,t}, \quad \mu_0 < \mu_1, \quad (2)$$

$$\sigma_{\Delta_{2,t}}^2 = \sigma_0^2(1 - \Delta_{2,t}) + \sigma_1^2 \Delta_{2,t}, \quad \sigma_0^2 < \sigma_1^2. \quad (3)$$

$\Delta_{1,t}$ と $\Delta_{2,t}$ は互いに独立なマルコフ連鎖に従う状態変数であり, それぞれ 0, または 1 の値をとる。また, その推移確率は

$$\Pr[\Delta_{1,t} = j | \Delta_{1,t-1} = i] = p_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \quad (4)$$

$$\Pr[\Delta_{2,t} = l | \Delta_{2,t-1} = k] = q_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \quad (5)$$

$$\sum_{j=0}^1 p_{ij} = \sum_{l=0}^1 q_{kl} = 1 \quad (6)$$

とする。ただし、(4)式の $\Pr[\Delta_{1,t}=j \mid \Delta_{1,t-1}=i] = p_{ij}$ は、変数 $\Delta_{1,t}$ が状態 i から状態 j に推移する確率、(5)式の $\Pr[\Delta_{2,t}=l \mid \Delta_{2,t-1}=k] = q_{kl}$ は、変数 $\Delta_{2,t}$ が状態 k から状態 l に推移する確率である。平均は $\Delta_{1,t}$ の推移に従って変動し、 $\Delta_{1,t}=0$ のときに μ_0 、 $\Delta_{1,t}=1$ のときに μ_1 になる。 $\mu_0 < \mu_1$ と制約を置いていることから、このモデルでは $\Delta_{1,t}=0$ のときにロー・リターン、 $\Delta_{1,t}=1$ のときにハイ・リターンとなる。同様に、ボラティリティは $\Delta_{2,t}$ に依存して変動し、 $\Delta_{2,t}=0$ のときに σ_0^2 、 $\Delta_{2,t}=1$ のときに σ_1^2 となる。 $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$ の制約から、 $\Delta_{2,t}=0$ のときにロー・ボラティリティ、 $\Delta_{2,t}=1$ のときにハイ・ボラティリティとなる。状態変数が1つの場合は、平均とボラティリティは同時にスイッチングすることになるが、状態変数を2つにすることによって、平均とボラティリティが別の時期にスイッチングを起こすことを可能にしている。また、平均がそれぞれ $\mu_0 < 0$ 、 $\mu_1 > 0$ であるならば、ロー・リターンの状態をベア局面、ハイ・リターンの状態をブル局面と呼ぶことができる。

推移確率に関しては、各状態はある程度の期間にわたって持続すると仮定し、次の制約を置くことにする³⁾。

$$p_{00}, p_{11}, q_{00}, q_{11} > 0.9.$$

この制約を満たすように最尤推定を行うには、例えば p_{00} については

$$p_{00} = \frac{0.9 + \exp(x)}{1 + \exp(x)}$$

と置いて、 x を推定すればよい。他の推移確率についても同様にして行う。

また、本論文では投資家はリスク中立的であ

ると仮定する。(1)式の誤差項 z_t の分布については、日経平均株価の収益率の裾の厚さ(ファット・テイル)を多くの先行研究で指摘されていることを踏まえ、ここでは t 分布に従うことにする。

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu). \quad (7)$$

ただし、 ν は自由度であり、 z_t の分散は1に基準化されている⁴⁾。

リスク中立的な世界では投資家はリスク・プレミアムを要求しないため、無リスク資産の利子率と原資産の期待収益率は等しくなる。原資産の期待収益率は(1)、(2)式より

$$E[R_t] = \mu_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1$$

となる。ただし、 π_0 、 π_1 は定常確率であり、

$$\pi_0 = \Pr[\Delta_{1,t}=0] = \frac{1-p_{11}}{2-p_{00}-p_{11}}, \quad (8)$$

$$\pi_1 = \Pr[\Delta_{1,t}=1] = \frac{1-p_{00}}{2-p_{00}-p_{11}} \quad (9)$$

である。したがって、 t 時点の無リスク資産の利子率を r_t とすると、リスク中立性のもとでは

$$r_t = \mu_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 \quad (10)$$

が成立する。この式を変形すると

$$\mu_{1,t} = \frac{r_t - \mu_0 \pi_0}{\pi_1} \quad (11)$$

となる。ただし、モデルの推定期間の r_t の変動を反映して、 μ_1 は $\mu_{1,t}$ に置き換えている。よって投資家のリスク中立性を満たすためには、平均を表す(2)式は

$$\mu_{\Delta_{1,t}} = \mu_0 (1 - \Delta_{1,t}) + \frac{r_t - \mu_0 \pi_0}{\pi_1} \Delta_{1,t} \quad (12)$$

となる。また、 $\mu_0 < \mu_{1,t}$ の制約が常に満たされるように、今後は μ_0 について $\mu_0 < 0$ という制約を置くことにする⁵⁾。状態変数が2つ含まれる Markov Switching モデルという意味で、こ

のモデルを MS(2)モデルと呼ぶことにする。

以上のように本論文では、投資家はリスク中立的であると仮定し、原資産の無条件の期待収益率 $E[R_t]$ は無リスク資産の利子率 r_t に等しいと置いて分析を進めることにする。ところで、里吉・三井 (2007) のリスク中立性の仮定においては、 $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が与えられたもとでの期待収益率 $E[R_t|I_{t-1}]$ を用いて、 $E[R_t|I_{t-1}] = r_t$ としている。このケースでは、(10)式は

$$r_t = \mu_0 \Pr[\Delta_{1,t}=0|I_{t-1}] + \mu_1 \Pr[\Delta_{1,t}=1|I_{t-1}], \quad (11) \text{式は}$$

$$\mu_{1,t} = \frac{r_t - \mu_0 \Pr[\Delta_{1,t}=0|I_{t-1}]}{\Pr[\Delta_{1,t}=1|I_{t-1}]}$$

となる。つまり、 $\mu_{1,t}$ の値は(11)式のように定常確率ではなく、 $\Pr[\Delta_{1,t}=0|I_{t-1}]$ と $\Pr[\Delta_{1,t}=1|I_{t-1}]$ に依存して決まることになる。これらの確率は状態変数のスイッチングに従って 0 から 1 の値をとることになるが、そのため(11)式のときと比べると $\mu_{1,t}$ のとりうる値の範囲は非常に大きくなってしまう。しかし、投資家が $\mu_{1,t}$ について各時点で大きく異なる値を想定しているとは通常考えにくい。したがって、本論文における投資家のリスク中立性の仮定では、無条件の期待収益率を用いて $E[R_t] = r_t$ と置くことにする。

本論文では MS(2)モデルの有効性を検討するため、状態変数が1つだけのモデルについても推定を行い、オプションの評価を行うことにする。状態変数が1つだけの Markov Switching モデル (以下、MS(1)モデル) は

$$R_t = \mu_{\Delta_t} + \sqrt{\sigma_{\Delta_t}^2} z_t, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\mu_{\Delta_t} = \mu_0(1 - \Delta_t) + \frac{r_t - \mu_0 \pi_0}{\pi_1} \Delta_t, \quad \mu_0 < 0,$$

$$\sigma_{\Delta_t}^2 = \sigma_0^2(1 - \Delta_t) + \sigma_1^2 \Delta_t$$

となり、推移確率は

$$\Pr[\Delta_t = j | \Delta_{t-1} = i] = p_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \quad (13)$$

$$\sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1 \quad (14)$$

で与えられる。このモデルでは、平均とボラティリティが同時にスイッチングを起こすことになる⁶⁾。

ボラティリティは一定の値をとり、平均のみがスイッチングを起こすモデル (以下、MS(m)モデル) は

$$R_t = \mu_{\Delta_t} + \sqrt{\sigma^2} z_t, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\mu_{\Delta_t} = \mu_0(1 - \Delta_t) + \frac{r_t - \mu_0 \pi_0}{\pi_1} \Delta_t, \quad \mu_0 < 0$$

となる。状態変数 Δ_t の推移確率は(13), (14)式と同じである。

平均は無リスク資産の利子率と等しく、ボラティリティのみがスイッチングするモデル (以下、MS(v)モデル) は

$$R_t = r_t + \sqrt{\sigma_{\Delta_t}^2} z_t, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_{\Delta_t}^2 = \sigma_0^2(1 - \Delta_t) + \sigma_1^2 \Delta_t, \quad \sigma_0^2 < \sigma_1^2$$

であり、状態変数 Δ_t の推移確率は(13), (14)式で与えられる。以上の4つのモデル、MS(2), MS(1), MS(m), MS(v)モデルを総称して、今後は MS モデルと呼ぶことにする。

2. Markov Switching EGARCH モデル

ボラティリティの変動に EGARCH モデルを仮定し、収益率の平均と EGARCH モデルのパラメータが独立にスイッチングを起こすモデル (以下、MSEG(2)モデル) は次のように表される。

$$R_t = \mu_{\Delta_{1,t}} + \sqrt{V_{t-1}[R_t | \Delta_{2,t} = l]} z_t, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu), \quad (15)$$

$$\mu_{\Delta_{1,t}} = \mu_0(1 - \Delta_{1,t}) + \frac{r_t - \mu_0 \pi_0}{\pi_1} \Delta_{1,t}, \quad \mu_0 < 0, \quad (16)$$

$$\ln V_{t-1}[R_t | \Delta_{2,t} = l]$$

$$= \omega_l + \beta_l \ln V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{2,t-1} = l] + \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)], \quad (17)$$

$$z_{t-1} = \frac{R_{t-1} - r_{t-1}}{\sqrt{V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{2,t-1} = l]}}. \quad (18)$$

ただし、 $l=0,1$ である。(15)式の $V_{t-1}[R_t | \Delta_{2,t} = l]$ は、 $t-1$ 期までの情報と $\Delta_{2,t}=l$ を条件とした R_t の条件付き分散である。(17)式の ω_l には $\omega_0 < \omega_1$ と制約を置き、 β_l の大小関係は ω_l に従って決まるとする⁷⁾。状態変数 $\Delta_{1,t}$ と $\Delta_{2,t}$ の推移確率は、(4)–(6)式と同じである。また、前節で述べたように投資家はリスク中立的であると仮定しているので、平均は MS(2) モデルのケースと同様に(16)式になる。 z_t は標準化された予測誤差であり、(18)式の右辺の分子は本来 $R_{t-1} - E_{t-2}[R_{t-1}]$ であるが、リスク中立性より $R_{t-1} - r_{t-1}$ としている。(17)式の $E(|z_{t-1}|)$ は、 $2\sqrt{v-2}\Gamma((v+1)/2)/[(v-1)\Gamma(v/2)\sqrt{\pi}]$ となる。

ところで、GARCH モデルや EGARCH モデルにマルコフ連鎖に従う状態変数を直接導入すると、最尤法でモデルのパラメータを推定することができないことが知られている。なぜなら、 t 時点のボラティリティは t 時点までの全ての状態変数に依存することになり、状態変数が2つの値をとるケースでは2^{*t*} 通りの状態変数の組み合わせを考えなければならず、そのため、コンピューターで計算する際のプログラミングが非常に複雑になってしまうからである。そこで本論文では、モデルの最尤推定を可能にするために、Haas *et al.* (2004) の Markov Switching GARCH モデルのアイデアを採用することにした。(17)、(18)式は、 $l=0$ のとき

$$\begin{aligned} & \ln V_{t-1}[R_t | \Delta_{2,t} = 0] \\ &= \omega_0 + \beta_0 \ln V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{2,t-1} = 0] \\ &+ \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)], \end{aligned}$$

$$z_{t-1} = \frac{R_t - r_t}{\sqrt{V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{2,t-1} = 0]}} ,$$

$l=1$ のとき

$$\begin{aligned} & \ln V_{t-1}[R_t | \Delta_{2,t} = 1] \\ &= \omega_1 + \beta_1 \ln V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{2,t-1} = 1] \\ &+ \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)], \end{aligned}$$

$$z_{t-1} = \frac{R_t - r_t}{\sqrt{V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{2,t-1} = 1]}}$$

となる。このように、このモデルのボラティリティの式では、 t 時点と $t-1$ 時点の状態変数の値は同じになっている。つまり、 t 時点でスイッチングが起きたとすると、実際には $t-1$ 時点の状態と t 時点の状態は異なるのだが、 t 時点と同じ状態の $t-1$ 時点のボラティリティを考え、それに依存して t 時点のボラティリティが決定されるとしている。その結果、無数の状態変数の組み合わせを考える必要がなくなり、最尤法による推定が可能になる。詳しい推定法は、補論で解説する。

状態変数が1つのモデル（以下、MSEG(1)モデル）は

$$\begin{aligned} R_t &= \mu_{\Delta_t} + \sqrt{V_{t-1}[R_t | \Delta_t = j]} z_t, \\ z_t &\sim i.i.d.t(0, 1, v), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mu_{\Delta_t} = \mu_0(1 - \Delta_t) + \frac{r_t - \mu_0 \pi_0}{\pi_1} \Delta_t, \quad \mu_0 < 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \ln V_{t-1}[R_t | \Delta_t = j] \\ &= \omega_j + \beta_j \ln V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{t-1} = j] \\ &+ \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)], \end{aligned} \quad (21)$$

$$z_{t-1} = \frac{R_{t-1} - r_{t-1}}{\sqrt{V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{t-1} = j]}} \quad (22)$$

となる。ただし、 $j=0,1$ である。このモデルでは、平均と EGARCH モデルのパラメータが同時にスイッチングを起こすことになる⁸⁾。

平均のみがスイッチングを起こすモデル（以下、MSEG(m)モデル）は

$$R_t = \mu_{\Delta_t} + \sqrt{V_{t-1}[R_t]} z_t, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, v),$$

$$\mu_{\Delta_t} = \mu_0(1 - \Delta_t) + \frac{r_t - \mu_0 \pi_0}{\pi_1} \Delta_t, \quad \mu_0 < 0,$$

$$\ln V_{t-1}[R_t] = \omega + \beta \ln V_{t-2}[R_{t-1}] + \theta z_{t-1} \\ + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)],$$

$$z_{t-1} = \frac{R_{t-1} - r_{t-1}}{\sqrt{V_{t-2}[R_{t-1}]}}$$

となる。このモデルでは、ボラティリティの部分は通常の EGARCH モデルになる。

平均は無リスク資産の利子率と等しく、EGARCH モデルのパラメータのみがスイッチングするモデル（以下、MSEG(v)モデル）は

$$R_t = r_t + \sqrt{V_{t-1}[R_t | \Delta_t = j]} z_t,$$

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\ln V_{t-1}[R_t | \Delta_t = j] \\ = \omega_j + \beta_j \ln V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{t-1} = j] \\ + \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)],$$

$$z_{t-1} = \frac{R_{t-1} - r_{t-1}}{\sqrt{V_{t-2}[R_{t-1} | \Delta_{t-1} = j]}}$$

となる。ただし、 $j=0, 1$ である。以上の MSEG (1), MSEG(m), MSEG(v)モデルの状態変数 Δ_t の推移確率は、(13), (14)式で与えられる。MSEG(2)モデルも含めて、今後はこれらのモデルを総称して MSEG モデルと呼ぶことにする。

最後に、スイッチングを含まない通常の EGARCH モデルは

$$R_t = r_t + \sqrt{V_{t-1}[R_t]} z_t,$$

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\ln V_{t-1}[R_t] = \omega + \beta \ln V_{t-2}[R_{t-1}] + \theta z_{t-1} \\ + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)],$$

$$z_{t-1} = \frac{R_{t-1} - r_{t-1}}{\sqrt{V_{t-2}[R_{t-1}]}}$$

である。

Ⅲ. オプション価格の導出方法

1. リスク中立性の下でのオプション価格

投資家がリスク中立的な場合、ヨーロッパアン・オプションの価格は、満期におけるオプション価格の期待値を無リスク資産の利子率 r で割り引いた割引現在価値となる。 T を評価日、 $T + \tau$ を満期日、 C_T を権利行使価格 K のコール・オプションの T 時点の価格とすると、 C_T は

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E[\max(S_{T+\tau} - K, 0)] \quad (23)$$

と表される⁹⁾。ここで、 $S_{T+\tau}$ はオプションの満期の原資産価格である。MS モデル、MSEG モデルの場合、右辺の期待値を解析的に求めることができないので、モンテカルロ・シミュレーションによって評価する。シミュレーションを n 回行い、 n 個の満期の原資産価格 $S_{T+\tau}$ が得られたとして、これらを $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ とする。ただし、 $S_{T+\tau}^{(i)}$ は i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である。 n が十分に大きいとき、大数の法則より(23)式は以下の式によって評価することができる。

$$C_T \approx (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0). \quad (24)$$

2. モンテカルロ・シミュレーションの手順

モンテカルロ・シミュレーションによるオプション価格の計算手順は以下の通りである。ここでは MSEG(2)モデルについて説明する。

[1] 標本 $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ を使って、MSEG(2)モデルの未知パラメータを最尤推定する。

[2] 互いに独立な標準正規分布から正規乱数

$$\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$$

を生成する。

[3] 互いに独立な標準一様分布から、2系列の一様乱数

$$\{u_{1,T+1}^{(i)}, u_{1,T+2}^{(i)}, \dots, u_{1,T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n, \\ \{u_{2,T+1}^{(i)}, u_{2,T+2}^{(i)}, \dots, u_{2,T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$$

を生成する。

[4] 手順[1]で推定された推移確率と手順[3]の一様乱数を使って、 $T+1$ から $T+\tau$ までの状態変数

$$\{\Delta_{1,T+1}^{(i)}, \Delta_{1,T+2}^{(i)}, \dots, \Delta_{1,T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n, \\ \{\Delta_{2,T+1}^{(i)}, \Delta_{2,T+2}^{(i)}, \dots, \Delta_{2,T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$$

を求める。 $\Delta_{1,t}$ は、投資家のリスク中立性の仮定より、(8), (9)式の定常確率 π_0, π_1 を使って生成する。一方 $\Delta_{2,t}$ は、推移確率 q_{00}, q_{11} から求める。ただし、 T 時点の $\Delta_{2,T}$ は未知であることから、 $T+1$ 時点の $\Delta_{2,T+1}$ は下記の確率から求めることにする。

$$\Pr[\Delta_{2,T+1}=l|I_T] \\ = \sum_{k=0}^1 \Pr[\Delta_{2,T+1}=l|\Delta_{2,T}=k] \Pr[\Delta_{2,T}=k|I_T].$$

[5] 手順[2], [4]の値をMSEG(2)モデルに代入して、 $T+1$ 時点から $T+\tau$ 時点までの収益率

$$\{R_{T+1}^{(i)}, R_{T+2}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$$

を計算する。

[6] 次の式を使ってオプションの満期 $T+\tau$ 時点における原資産価格($S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)}$)を求める。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau} (1 + R_{T+s}^{(i)}), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (25)$$

[7] (24)式より、コール・オプションの価格 C_T を計算する。

本論文ではモンテカルロ・シミュレーションの回数を $n=200,000$ とした。また、計算され

る C_T の分散を小さくするため、Satoyoshi and Mitsui (2011), 里吉・三井 (2013) と同様に、代表的な分散減少法である負相関法と制御変量法を併せて用いた¹⁰⁾。

IV. 実証結果

1. データ

本論文では、ヨーロッパ・オプションである日経225オプションのコールについて実証分析を行った。期間は2010年1月限から2014年10月限までの58限月であり、満期から20日前($\tau=20$)の終値を分析対象としている。コールの標本サイズは1120となった¹¹⁾。原資産は日経平均株価であり、また、無リスク資産としては無担保コール翌日物を用いることにした¹²⁾。

MSモデルなどのパラメータの推定には、満期の20日前から更に3,500日前までの日経平均株価の終値を使用した¹³⁾。例えば、最初の限月である2010年1月限の場合、オプションの評価日は満期から20日前の2009年12月8日、その3,500日前は1995年9月12日になる。日次収益率を計算すると、標本期間は1995年9月13日から2009年12月8日までとなり(標本の大きさは $T=3,500$)、この期間の日次収益率を用いてモデルのパラメータの推定を行うことになる。その推定されたパラメータを所与として、Ⅲ.で説明したモンテカルロ・シミュレーションの手順に従いオプション価格を求める。次の限月以降も同様に、推定期間の設定、モデルのパラメータ推定、オプション価格の計算を行う。最後の限月は2014年10月限、その20日前は2014年9月10日となるので、本論文で用いた日経平均株価の日次収益率の全標本期間は、1995年9月

13日から2014年9月10日までとなった。

図表1には全標本期間における日経平均株価の日次収益率(%)の基本統計量を示した。平均は0.008とプラスの値を示しているが有意ではない。歪度の値は-0.152と統計的に有意な負の値を示しており、日次収益率は左に歪んだ分布に従っていると考えられる。また、尖度の値は8.505で正規分布の3を大幅に上回っていることから、正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが分かる。日経平均株価の終値と日次収益率の推移は、それぞれ図表2、図表

図表1 日経平均株価の日次収益率(%)の基本統計量

標本サイズ	平均	標準偏差	歪度	尖度
4669	0.008	1.533	-0.152	8.505
	(0.022)		(0.036)	(0.072)

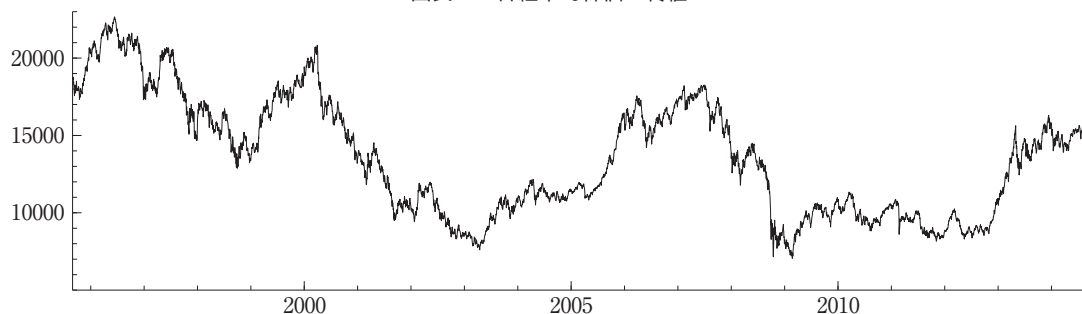
(注) データは1995年9月13日から2014年9月10日まで。括弧内の数値は標準誤差を表す。標本サイズを N 、標準偏差を $\hat{\sigma}$ とすると、平均、歪度、尖度の標準誤差はそれぞれ、 $\hat{\sigma}/\sqrt{N}$ 、 $\sqrt{6/N}$ 、 $\sqrt{24/N}$ である。

3に示した。2008年のリーマン・ショックでは株価は大暴落し、ボラティリティが非常に高くなっていることがわかる。また、2012年の年末からの急激な上昇トレンドは、いわゆるアベノミクス効果によるものと推察される。

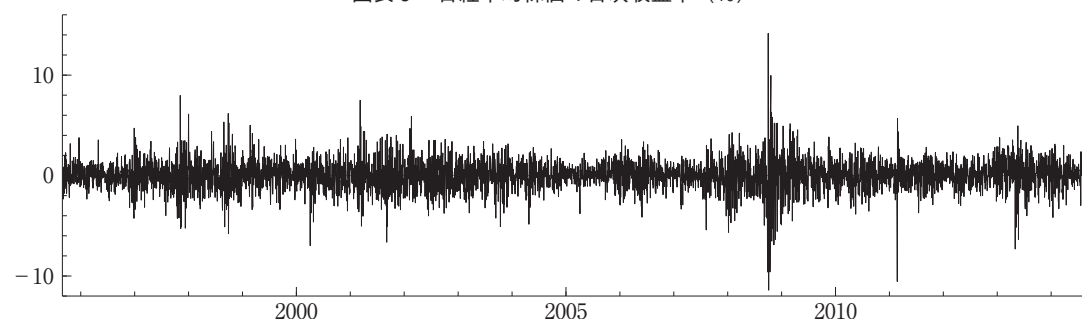
2. Markov Switching モデルの推定結果

図表4にはMSモデルの推定結果を示した。まず、収益率の平均とボラティリティが独立してスイッチングを起こすMS(2)モデルを見てみると、平均の推移確率 p_{00} 、 p_{11} はそれぞれ0.998、0.999と非常に高い値になっている。一方、ボラティリティの推移確率 q_{00} 、 q_{11} はそれぞれ0.991、0.975であり、こちらも1に近い値を示しているが、平均の推移確率よりも若干低い。 $\mu_0 < 0$ という制約から、 $\Delta_{1,t} = 0$ はベア局面になる。 μ_0 の値は-0.143であり、有意ではないが負の値となっている。このモデルには期待

図表2 日経平均株価の終値



図表3 日経平均株価の日次収益率(%)



収益率と無リスク資産の利子率が等しいという制約があり、通常、利子率は負の値にはならない。したがって、もう一方の平均 $\mu_{1,t}$ は正の値をとり、 $\Delta_{1,t}=1$ はブル局面となる。また、ボラティリティを表す σ_0^2 と σ_1^2 は、それぞれの状態で値が大きく異なっている。図表5にはMS(2)モデルの平滑化確率を示した。ブル局面 ($\Delta_{1,t}=1$) の確率を表す太線を見てみると、ほとんどの期間においてブルの確率が高くなっている。実際の日経平均株価はこのデータ期間において上昇トレンドと下降トレンドを何度も繰り返しているが、ベア局面は2000年と2001年あたりのみが捉えられている。細線はハイ・ボラティリティ ($\Delta_{2,t}=1$) の確率であり、平均と比べると頻繁にスイッチングを起こしていて、スイッチングの時期は異なっていることが分かる。

平均とボラティリティが同時にスイッチングを起こすMS(1)モデルの推定結果は、図表4の3列目に示した。推移確率 p_{00} , p_{11} の推定値はそれぞれ0.975, 0.991であり、これはMS(2)モデルにおけるボラティリティの推移確率 q_{11} , q_{00} と全く同じ値になっている。また、 σ_0^2 と σ_1^2 についても、MS(2)モデルと大小関係が入れ替わっているだけでほとんど同じ値である。そして、図表6に示したロー・ボラティリティ ($\Delta_t=1$) の平滑化確率は、1からMS(2)モデルのハイ・ボラティリティの確率を引いたものになっている。したがって、MS(1)モデルのスイッチングはボラティリティの変動のみによって引き起こされていて、平均とボラティリティが同時にスイッチングを起こしているわけではないことが分かる。

図表4の4列目は、平均のみがスイッチングを起こすMS(m)モデルの結果である。推移確

率はMS(2)モデルの p_{00} , p_{11} とほぼ同じ値であるが、 μ_0 はMS(2)モデルよりも若干0に近い。この μ_0 の違いは、図表7のブル局面の確率の推移にも表れている。MS(2)モデルではほとんどの期間においてブル局面であったが、このモデルでは2003年から2006年にかけてと2013年あたりだけがブル局面となっている。

ボラティリティのみがスイッチングするMS(v)モデルでは、推移確率の値はMS(2)モデルの q_{00} , q_{11} と同じになっている(図表4の5列目)。ボラティリティの値もほぼ同じで、ハイ・ボラティリティの確率も同じように推移している(図表8)。

これらのMSモデルの対数尤度、AIC、SBICは図表4の下3行に示した。対数尤度が最も高いのは平均とボラティリティが同時にスイッチングを起こすMS(1)モデルであり、AICの基準においてもこのモデルが最も当てはまりが良いという結果となった。SBICの基準ではボラティリティのみがスイッチングするMS(v)モデルが選択された。いずれにせよ、平均のスイッチングはモデルの当てはまり具合を高めることにはならないと考えられる。

3. Markov Switching EGARCH モデルの推定結果

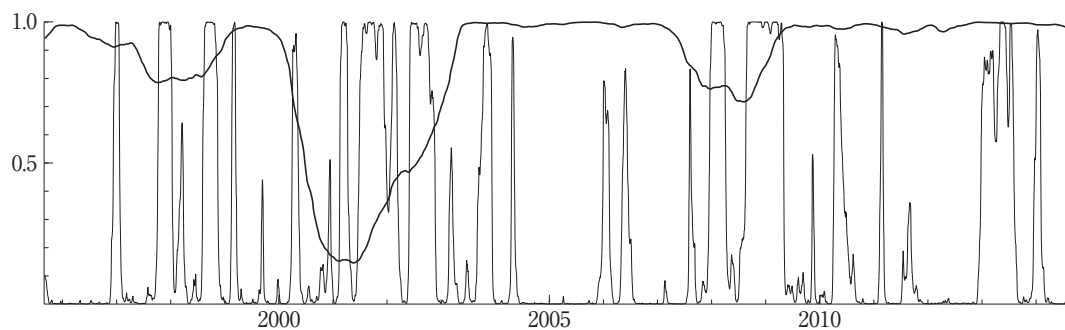
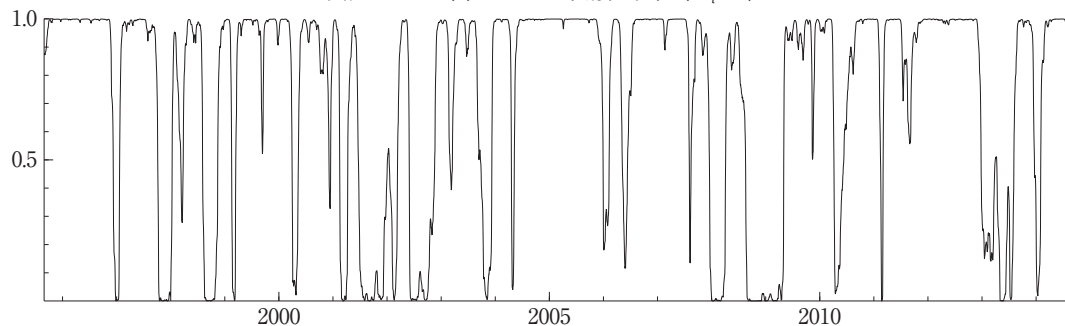
MSEGモデルとEGARCHモデルの推定結果は図表9に示した。平均とEGARCHモデルのパラメータが独立してスイッチングを起こすMSEG(2)モデルの結果は2列目である。平均の推移確率 p_{00} , p_{11} の値はそれぞれ0.996, 0.999であり、MS(2)モデルの値とほとんど同じとなっている。また、平均 μ_0 の値もさほど変わらない。ところが、図表10の平滑化確率を見ると、リーマン・ショックの前後など、いく

図表4 MS モデルの推定結果

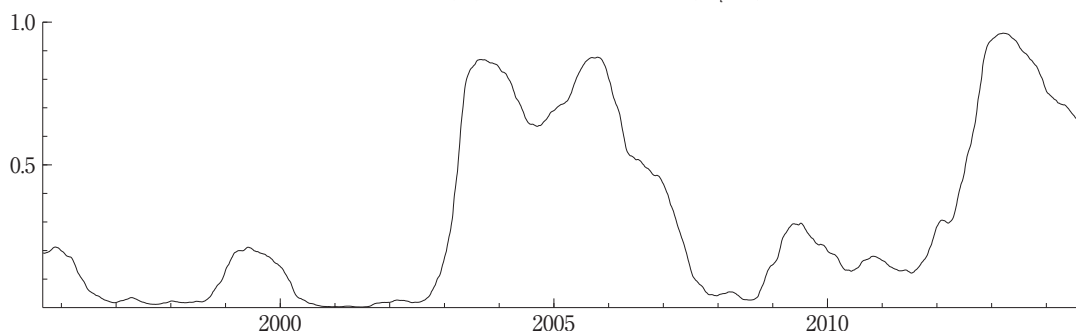
	MS(2)	MS(1)	MS(m)	MS(v)
p_{00}	0.998 (0.002)	0.975 (0.006)	0.999 (0.000)	0.992 (0.002)
p_{11}	0.999 (0.001)	0.991 (0.002)	0.998 (0.001)	0.975 (0.006)
q_{00}	0.991 (0.002)	—	—	—
q_{11}	0.975 (0.006)	—	—	—
μ_0	-0.143 (0.091)	-0.115 (0.047)	-0.047 (0.012)	—
σ_0^2	1.332 (0.059)	4.949 (0.457)	2.344 (0.092)	1.339 (0.058)
σ_1^2	5.037 (0.426)	1.321 (0.063)	—	5.064 (0.415)
ν	9.901 (1.475)	9.972 (1.521)	4.533 (0.304)	10.155 (1.533)
log-lik.	-8159.94	-8158.16	-8337.44	-8161.59
AIC	16335.88	16328.31	16684.89	16333.19
SBIC	16387.47	16367.01	16717.13	16365.43

(注) 括弧内の数値は標準誤差を表す。

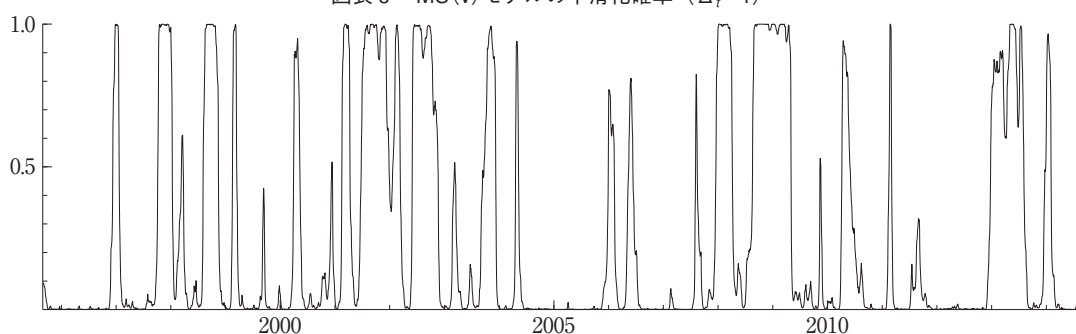
図表5 MS(2)モデルの平滑化確率

(注) 太線はブル局面 ($\Delta_{1,t}=1$) の確率, 細線はハイ・ボラティリティ ($\Delta_{2,t}=1$) の確率を示す。図表6 MS(1)モデルの平滑化確率 ($\Delta_t=1$)

図表7 MS(m)モデルの平滑化確率 ($\Delta_t=1$)



図表8 MS(v)モデルの平滑化確率 ($\Delta_t=1$)



つかの下降トレンドの時期においてブル局面の確率は低くなっており、MS(2)モデルよりもブル・ベア局面の識別が大幅に向上していることが分かる。このことは、Markov Switchingモデルによって資産価格のブル・ベア局面を捉えるには、ボラティリティをどのように定式化するかが重要であることを示唆している。一方、EGARCH部分の推移確率 q_{00} 、 q_{11} はそれぞれ0.991、0.984であり、MS(2)モデルと同様に平均の推移確率よりも若干低くなっている（平滑化確率は図表10の細線）。ボラティリティに対するショックの持続性は、それぞれの状態において $\hat{\beta}_0=0.987$ 、 $\hat{\beta}_1=0.828$ であり、 $\hat{\omega}_0<\hat{\omega}_1$ であることから、ロー・ボラティリティの時期よりもハイ・ボラティリティの時期のほうがボラティリティに対するショックの持続性が低いことが分かる。また、レバレッジ効果を示すパラ

メータ θ の値は -0.124 で有意であり、多くの先行研究と同じ結果になっている。

図表9の3列目は、平均とEGARCHモデルのパラメータが同時にスイッチングを起こすMSEG(1)モデルの結果である。 μ_0 は -0.043 であり、MSEG(2)モデルのときよりも0に近い値になっている。EGARCH部分のパラメータについては、ハイ・ボラティリティを表す ω_1 の値がMSEG(2)モデルよりも低くなっている以外は、ほぼ同じ値である。図表11を確認すると、MSEG(2)モデルでのハイ・ボラティリティの確率と比べると多少滑らかではあるが、ほとんど同じ変動を示している。したがって、平均とボラティリティは同時ではなくそれぞれ別々のタイミングでスイッチングしていると考えられ、このことはMSモデルにおける結果と同様である。

平均のみがスイッチングする MSEG(m) モデルの推移確率の推定値は、MSEG(2) モデルの結果とほとんど同じであり、平均の μ_0 の推定値も非常に近い (図表9の4列目)。また、図表12の平滑化確率の変動は、MSEG(2) モデルでのブル局面を示すグラフと同じに見える。よって、ブル・ベア局面を捉えることのみを目的とした場合には、EGARCH 部分のパラメータの変化は考える必要はなく、マルコフ過程に従うスイッチングは平均だけで十分であると考えられる。

平均は定数 (無リスク資産の利子率) で、ボラティリティのみがスイッチングする MSEG(v) モデルの結果を見ると、MSEG(2) モデルの推定結果とかなり近いことが分かる。ハイ・ボラティリティの確率の推移は図表13であり、MSEG(2) モデルにおけるハイ・ボラティリティの確率と全く同じになっている。

EGARCH モデルの推定結果は最後の列に示した。ボラティリティに対するショックの持続性を表す β_0 の値は0.974であり、MSEG(2) モデルと比較すると、 β_1 より β_0 の値に近い。このことから、スイッチングを含まない通常の EGARCH モデルは、ハイ・ボラティリティの時期におけるショックの持続性を捉えるには適切ではないと考えられる。

対数尤度の値を比較すると、最も高いのは MSEG(1) モデルであり、次は MSEG(2) モデルとなっている。AIC の基準では MSEG(1) モデル、SBIC の基準では EGARCH モデルが選択された。したがって、MS モデルのケースと同じようにボラティリティの変動を EGARCH としたこれらのモデルにおいても、平均のスイッチングはモデルの当てはまり具合を高めることにはならないと考えられる¹⁴⁾。

4. オプション価格の推定値の比較

MS モデル、MSEG モデル、EGARCH モデルと BS モデル¹⁵⁾ によるオプション価格の評価値と、実際の市場価格を用いて、以下のように平均誤差率 (mean error rate; MER) と平均2乗誤差率の平方根 (root mean square error rate; RMSER) を計算し、各モデルの比較を行う。

$$\text{MER} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{C}_i^{\text{推定値}} - C_i^{\text{市場価格}}}{C_i^{\text{市場価格}}} \right),$$

$$\text{RMSER} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{C}_i^{\text{推定値}} - C_i^{\text{市場価格}}}{C_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}.$$

ここで、 $\hat{C}_i^{\text{推定値}}$ はモンテカルロ・シミュレーションによるコール・オプションの推定値、あるいは、BS モデルの理論価格を表し、 $C_i^{\text{市場価格}}$ はコール・オプションの市場価格を表す。 N は標本サイズである。MER の値を計算することにより、モデルの推定値が市場価格と比べてどの程度バイアスを持っているかが明らかになる。もう1つの RMSER は、推定値と市場価格の乖離度を示す基準である。

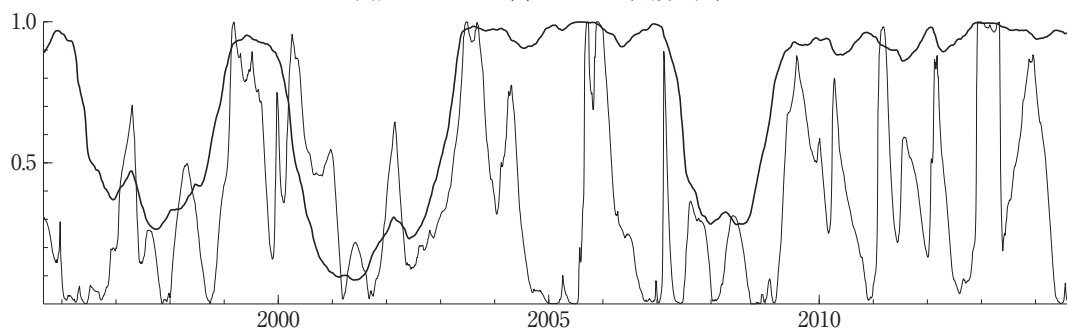
また、これらの MER と RMSER の計算は、各オプションを7種類のマネネス (moneyness) に分類し、マネネスごとでも行うことにする (図表14を参照)。マネネスはそれぞれ、 $S/K < 0.85$ ならば very-deep-out-of-the-money (VDOTM) のオプション、 $0.85 \leq S/K < 0.91$ ならば deep-out-of-the-money (DOTM) のオプション、 $0.91 \leq S/K < 0.97$ ならば out-of-the-money (OTM) のオプション、 $0.97 \leq S/K \leq 1.03$ ならば at-the-money (ATM) のオプション、 $1.03 < S/K \leq 1.09$ ならば in-the-money (ITM) のオプション、 $1.09 < S/K \leq 1.15$ ならば deep-in-the-money (DITM) のオプション、 $S/K >$

図表9 MSEG モデル, EGARCH モデルの推定結果

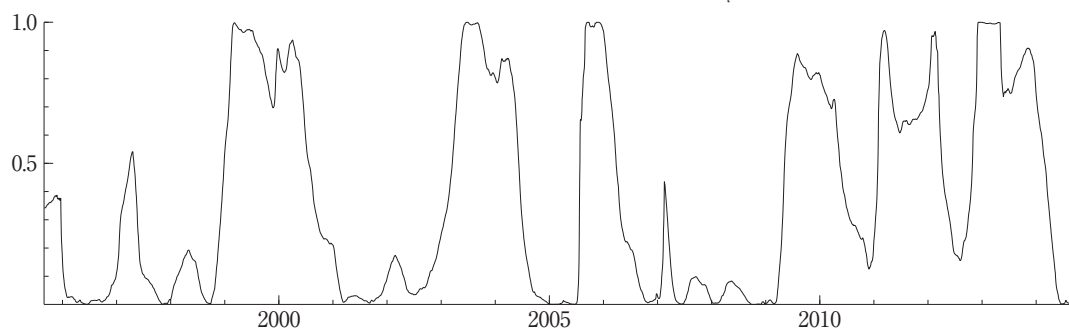
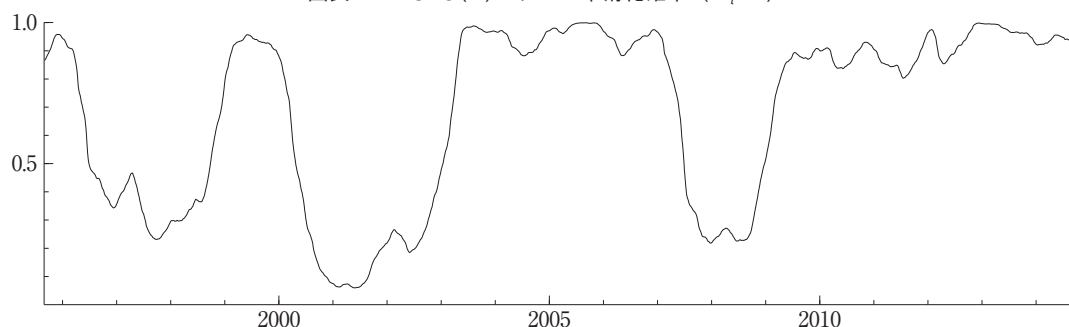
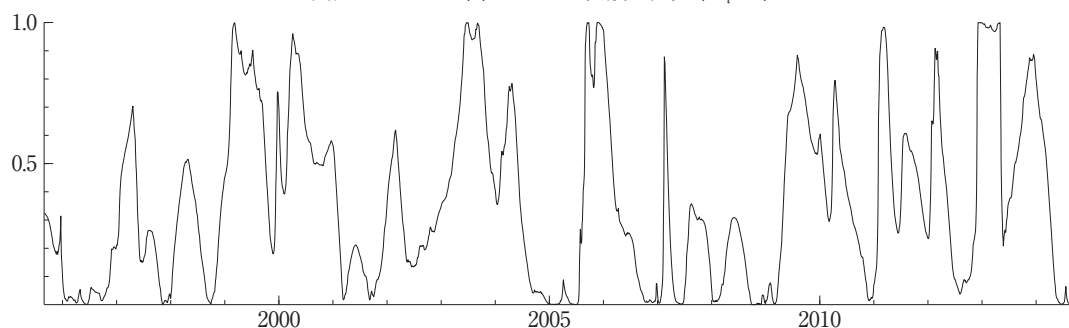
	MSEG(2)	MSEG(1)	MSEG(m)	MSEG(v)	EGARCH
p_{00}	0.996 (0.003)	0.996 (0.002)	0.996 (0.003)	0.991 (0.004)	— —
p_{11}	0.999 (0.001)	0.993 (0.005)	0.998 (0.002)	0.985 (0.011)	— —
q_{00}	0.991 (0.004)	— —	— —	— —	— —
q_{11}	0.984 (0.012)	— —	— —	— —	— —
μ_0	-0.131 (0.066)	-0.043 (0.018)	-0.129 (0.071)	— —	— —
ω_0	0.002 (0.003)	0.002 (0.003)	0.016 (0.003)	0.002 (0.003)	0.017 (0.003)
ω_1	0.124 (0.070)	0.077 (0.024)	— —	0.119 (0.065)	— —
β_0	0.987 (0.004)	0.987 (0.004)	0.974 (0.004)	0.987 (0.004)	0.974 (0.004)
β_1	0.828 (0.085)	0.882 (0.035)	— —	0.833 (0.081)	— —
θ	-0.124 (0.014)	-0.121 (0.012)	-0.089 (0.010)	-0.124 (0.014)	-0.088 (0.010)
γ	0.109 (0.018)	0.118 (0.017)	0.161 (0.015)	0.108 (0.018)	0.161 (0.015)
ν	13.998 (2.746)	13.071 (2.200)	11.696 (1.746)	14.341 (2.841)	11.985 (1.816)
log-lik.	-7992.02	-7990.96	-8007.04	-7993.86	-8009.58
AIC	16008.05	16001.91	16030.08	16005.71	16029.15
SBIC	16085.43	16066.40	16081.67	16063.75	16061.40

(注) 括弧内の数値は標準誤差を表す。

図表10 MSEG(2)モデルの平滑化確率



(注) 太線はブル局面 ($\Delta_{1,t}=1$) の確率, 細線はハイ・ボラティリティ ($\Delta_{2,t}=1$) の確率を示す。

図表11 MSEG(1)モデルの平滑化確率 ($\Delta_t=1$)図表12 MSEG(m)モデルの平滑化確率 ($\Delta_t=1$)図表13 MSEG(v)モデルの平滑化確率 ($\Delta_t=1$)

1.15ならば very-deep-in-the-money (VDITM) のオプションである。

MER, RMSER の計算結果は、図表15にまとめた。2列目から8列目まではマネネス別、一番右の列は全体の結果である。図表の2行目には各マネネスと Total での標本サイズを示した。まず、上段の MER の値から見てみると、Total では MSEG(m) モデルの値が -0.111 で

あり、全てのモデルの中でオプション価格の推定値の上方または下方バイアスが最も小さいことが分かる。Total で次に小さいのは EGARCH モデルであるが、MSEG(m) モデルの結果とほとんど変わらない。MSEG(2) モデル、MSEG(1) モデルと MSEG(v) モデルの値は -0.25 前後でほとんど同じである。また、BS モデルの値は 0.445 と上方バイアスがかなり

図表14 マネネスによるコール・オプションの分類

$S/K < 0.85$	very-deep-out-of-the-money (VDOTM)
$0.85 \leq S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)
$1.09 < S/K \leq 1.15$	deep-in-the-money (DITM)
$1.15 < S/K$	very-deep-in-the-money (VDITM)

(注) S は原資産価格, K は権利行使価格を表す。

大きく、4つのMSモデルについては明らかな過大評価が生じている。このことから、少なくともボラティリティの変動の定式化はEGARCHモデルにしたほうが良いことが分かる。ここで、4つのMSEGモデルとEGARCHモデルについてマネネスの結果も含めて比較すると、MSEG(2)モデルとMSEG(v)モデルの値は、Totalだけでなく全てのマネネスにおいて非常に近い値になっていることが分かる。MSEG(m)モデルについては、EGARCHモデルの結果にかなり似ている。また、MSEG(1)モデルはMSEG(m)モデルやEGARCHモデルよりも、MSEG(2)モデルとMSEG(v)モデルの結果に近い。

図表の下段はRMSERの計算結果である。Totalで最も小さいのはMSEG(v)モデルの0.492であり、次はMSEG(2)モデルとEGARCHモデルの0.495であるが、他のMSEGモデルも含めてその差は小さい。また、この基準でもMSモデルとBSモデルの誤差は非常に大きくなっている。マネネスの結果も含めて4つのMSEGモデルとEGARCHモデルを比べると、この基準においてもMSEG(2)モデルとMSEG(v)モデル、MSEG(m)モデルとEGARCHモデル、そしてMSEG(1)モデルの3パターンに分類できる。前節のMSEGモデルの分析では、MSEG(2)モデルとMSEG(m)モデルはブル・

ベア局面を捉えるモデルとして適していることが明らかになった。しかしながら、オプションの評価においては、MSEG(2)モデルとMSEG(m)モデルのパフォーマンスが特に良いという結果にはなっていない。よって、ブル・ベア局面を識別できるモデルを用いることでオプション価格の評価が向上する可能性は低いと推察される。ただし、MSEG(v)モデルのRMSERの値はTotalとDOTM、そしてOTMで最小であり、DOTMとOTMではEGARCHモデルを大きく上回るパフォーマンスを示している。したがって、ボラティリティのみがスイッチングを起こすMarkov Switching EGARCHモデルを用いたオプション評価法は、コール・オプションに対して有効である可能性がある。以上のMERとRMSERの結果から、Markov SwitchingモデルやBSモデルよりもMarkov Switching EGARCHモデルの方が全体としてパフォーマンスが高く、ボラティリティのスイッチングは重要であるが、平均のスイッチングは特に必要ではないことが示された。

図表16は、オプションの市場価格が1円であったものを取り除いて計算した結果である。同一限月内で権利行使価格が異なるオプションであっても、日経225オプションの最低価格が1円であることから、複数のOTMのオプションで実際の市場価格が1円になることがある。

本論文のようにオプション価格を理論モデルによって評価する場合、コールでは権利行使価格が高くなるほど評価値は低くなる。したがって、このように複数のオプションにおいて1円に値付けされるようなOTMのオプションでは、市場価格と推定値の乖離度は必然的に高くなってしまう。1円のオプションを除外した結果、その影響はVDOTMとDOTMのオプションのみに表れ、標準サイズはそれぞれ47,207と大幅に減少した。MSEGモデルとEGARCHモデルの結果を比べると、MERの基準ではMSEG(m)モデルがVDOTMとDOTM、そしてTotalにおいてEGARCHモデルより優れているが、これは図表15の結果と同じである。一方、RMSERの基準では、1円のオプションを含めたケースと比べると新たにDOTMの

MSEG(1)モデル、TotalのMSEG(2)モデルの値がEGARCHモデルよりも小さくなっている。また、TotalにおけるMSEG(2)モデルの0.412、MSEG(v)モデルの0.408という値は、EGARCHモデルの0.437よりも明らかにパフォーマンスが高く、その点も図表15の結果と異なっている。しかしながら、MERとRMSERの両基準の結果から総合的に判断すると、これらのモデルがMSEG(2)モデルとMSEG(v)モデル、MSEG(m)モデルとEGARCHモデル、そしてMSEG(1)モデルの3パターンに分類される点は、1円のオプションを含めたケースと同じである。

最後に、モデルによるパフォーマンスの違いがなぜ生じたのかを調べるために、MSEGモデルとEGARCHモデルについて各限月ごとに

図表15 コール・オプションの推定値の比較

	VDOTM	DOTM	OTM	ATM	ITM	DITM	VDITM	Total
標準サイズ (N)	141	248	229	202	141	81	78	1120
MER								
MS(2)	1.342	2.048	0.895	0.136	0.021	0.005	0.005	0.833
MS(1)	-0.217	2.622	1.596	0.266	0.044	0.004	0.004	0.933
MS(m)	0.270	3.228	1.704	0.276	0.047	0.006	0.004	1.154
MS(v)	1.352	1.991	0.883	0.134	0.021	0.005	0.005	0.819
MSEG(2)	-0.882	-0.491	-0.110	-0.020	0.005	0.004	0.005	-0.245
MSEG(1)	-0.909	-0.603	-0.147	-0.008	0.007	0.004	0.005	-0.278
MSEG(m)	-0.610	-0.209	0.023	0.024	0.015	0.007	0.005	-0.111
MSEG(v)	-0.882	-0.498	-0.116	-0.021	0.005	0.004	0.005	-0.248
EGARCH	-0.616	-0.212	0.016	0.021	0.014	0.007	0.005	-0.115
BS	2.451	0.585	0.066	-0.029	-0.012	-0.000	0.003	0.445
RMSER								
MS(2)	2.727	2.836	1.517	0.285	0.096	0.052	0.035	1.790
MS(1)	0.775	4.378	2.835	0.483	0.127	0.053	0.036	2.451
MS(m)	1.064	5.116	2.993	0.494	0.129	0.054	0.036	2.796
MS(v)	2.715	2.764	1.504	0.284	0.096	0.052	0.035	1.760
MSEG(2)	0.898	0.650	0.458	0.178	0.082	0.052	0.035	0.495
MSEG(1)	0.922	0.724	0.449	0.170	0.084	0.051	0.035	0.520
MSEG(m)	0.777	0.717	0.496	0.168	0.080	0.051	0.035	0.497
MSEG(v)	0.899	0.649	0.446	0.177	0.082	0.052	0.035	0.492
EGARCH	0.774	0.714	0.496	0.168	0.080	0.051	0.035	0.495
BS	15.152	6.389	1.343	0.346	0.091	0.055	0.036	6.191

図表16 コール・オプションの推定値の比較（1円を除く）

	VDOTM	DOTM	OTM	ATM	ITM	DITM	VDITM	Total
標本サイズ (N)	47	207	229	202	141	81	78	985
MER								
MS(2)	1.326	1.739	0.895	0.136	0.021	0.005	0.005	0.668
MS(1)	-0.449	1.960	1.596	0.266	0.044	0.004	0.004	0.823
MS(m)	-0.158	2.368	1.704	0.276	0.047	0.006	0.004	0.951
MS(v)	1.386	1.695	0.883	0.134	0.021	0.005	0.005	0.659
MSEG(2)	-0.757	-0.467	-0.110	-0.020	0.005	0.004	0.005	-0.163
MSEG(1)	-0.821	-0.564	-0.147	-0.008	0.007	0.004	0.005	-0.192
MSEG(m)	-0.389	-0.158	0.023	0.024	0.015	0.007	0.005	-0.038
MSEG(v)	-0.762	-0.473	-0.116	-0.021	0.005	0.004	0.005	-0.165
EGARCH	-0.398	-0.164	0.016	0.021	0.014	0.007	0.005	-0.042
BS	1.036	0.816	0.066	-0.029	-0.012	-0.000	0.003	0.229
RMSER								
MS(2)	2.507	2.456	1.517	0.285	0.096	0.052	0.035	1.456
MS(1)	0.639	3.496	2.835	0.483	0.127	0.053	0.036	2.123
MS(m)	0.642	3.949	2.993	0.494	0.129	0.054	0.036	2.331
MS(v)	2.575	2.404	1.504	0.284	0.096	0.052	0.035	1.440
MSEG(2)	0.788	0.629	0.458	0.178	0.082	0.052	0.035	0.412
MSEG(1)	0.847	0.699	0.449	0.170	0.084	0.051	0.035	0.437
MSEG(m)	0.685	0.707	0.496	0.168	0.080	0.051	0.035	0.438
MSEG(v)	0.793	0.628	0.446	0.177	0.082	0.052	0.035	0.408
EGARCH	0.680	0.705	0.496	0.168	0.080	0.051	0.035	0.437
BS	2.340	6.980	1.343	0.346	0.091	0.055	0.036	3.308

MER, RMSER の平均値を算出し、時系列グラフを作成した。図表17と図表18はそれぞれオプション評価期間の日経平均株価とその日次収益率であり、図表19はMERの推移、図表20はRSMERの推移である。ここではオプションの市場価格が1円であったものは除外している。4つのMSEGモデルのうちMSEG(2)モデルとMSEG(1)モデルのみをプロットしているのは、MSEG(m)モデルとMSEG(v)モデルは、それぞれEGARCHモデル、MSEG(2)モデルとほとんど同じ推移になっているためである。このことは、図表16の結果と整合的である。図表19のMERの推移から見ていくと、MSEG(2)モデルとMSEG(1)モデルは似たような動きをしているが、EGARCHモデルは何度か大きな値を示している。例えば、2011年3月11日の東

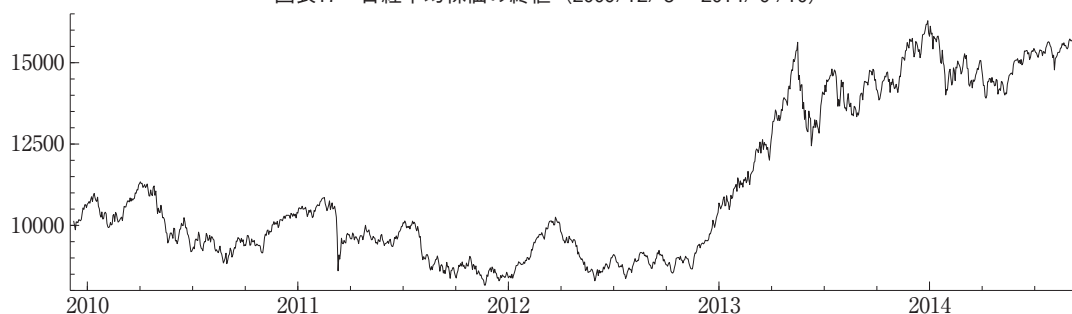
北地方太平洋沖地震前後の2011年3月10日（2011年4月限）と2011年4月11日（2011年5月限）において、EGARCHモデルのMERの値は非常に大きい。また、2014年の年明けの下落相場においても、EGARCHモデルのMERの値はMSEG(2)モデルやMSEG(1)モデルと比べて大きくなっている。このようなEGARCHモデルとMSEG(2)モデル、そしてMSEG(1)モデルとの乖離は、図表20に示したRMSERの推移にも表れている。どちらの時期も日経平均株価が大きく下落している局面であるが、Markov Switchingがモデルに含まれることによって、オプション価格が過大評価されにくくなっていると考えられる。

V. 結論と今後の課題

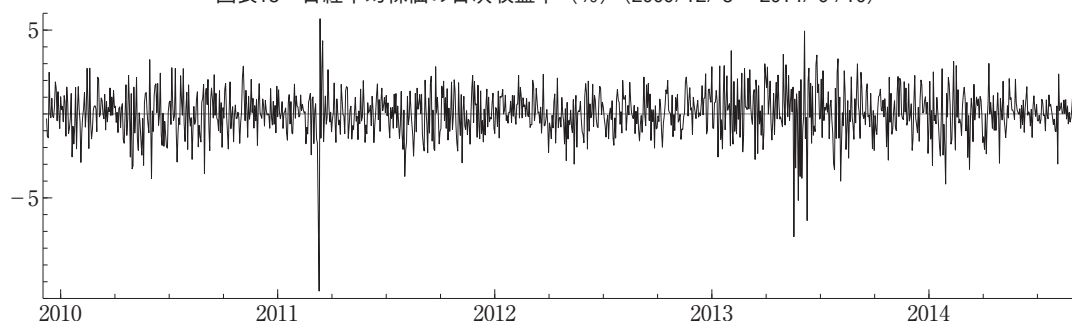
本論文では、日経平均株価の価格トレンドの識別可能性について、Markov Switching モデルならびに Markov Switching EGARCH モデルを用いて分析を行い、さらに、これらのモデルが日経225オプション価格の評価においてど

の程度有効であるか検証を行った。実証分析の結果、日経平均株価の価格トレンドは平均のみがスイッチングを起こす Markov Switching EGARCH モデルによって識別できることが明らかになった。また、コール・オプションの評価では Markov Switching EGARCH モデルのパフォーマンスが比較的高く、スイッチングはボラティリティについてのみ必要であることが

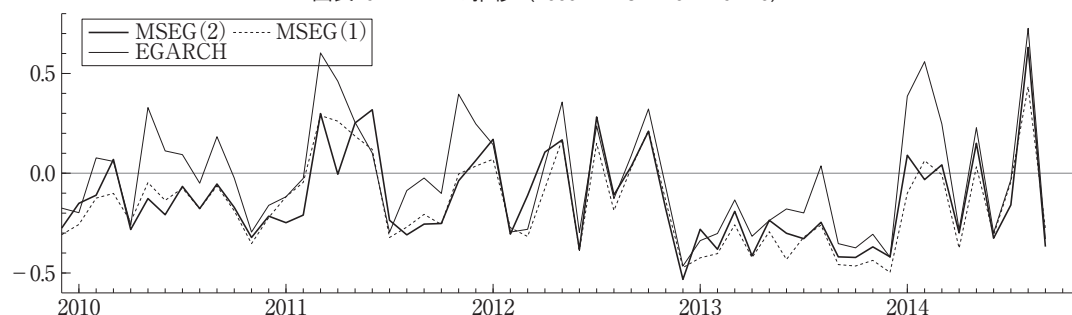
図表17 日経平均株価の終値 (2009/12/8 - 2014/9/10)



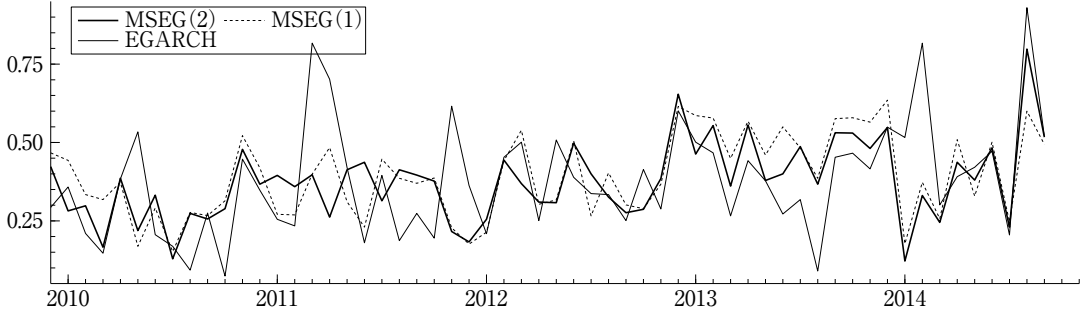
図表18 日経平均株価の日次収益率 (%) (2009/12/8 - 2014/9/10)



図表19 MERの推移 (2009/12/8 - 2014/9/10)



図表20 RMSEの推移 (2009/12/8 - 2014/9/10)



示された。

今回の研究ではボラティリティのモデルとしては EGARCH モデルのみを採用したが、今後の課題として、ボラティリティの定式化をそれ以外のモデルにした場合に、ブル・ベア局面をどの程度捉えることができるのか、詳細な分析を行う必要がある。オプション価格の評価については、里吉・三井 [2013] で提案した混合正規 EGARCH モデルも含めて、パフォーマンスの比較を行うことも重要である。また、今回の分析の対象はコール・オプションのみであったが、プット・オプションではどのような時系列モデルが最も適しているか調べていきたい。

補論：MSEG(2) モデルの最尤推定

尤度関数を L とすると、MSEG(2) モデルの尤度関数は

$$\begin{aligned} L &= f(R_1, R_2, \dots, R_T) = \prod_{t=1}^T f(R_t | I_{t-1}) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^1 f(R_t, \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_{t-1}) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^1 f(R_t | \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l, I_{t-1}) \\ &\quad \Pr[\Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_{t-1}] \end{aligned}$$

となる。ただし、 I_{t-1} は $t-1$ 時点までの情報集合であり、 $I_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$ である。対数尤

度関数は

$$\begin{aligned} \ln L &= \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^1 f(R_t | \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l, I_{t-1}) \right. \\ &\quad \left. \Pr[\Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_{t-1}] \right\} \\ &= \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \mathbf{i}' (\boldsymbol{\eta}_t \odot \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\eta}_t &= \begin{pmatrix} f(R_t | \Delta_{1,t}=0, \Delta_{2,t}=0, I_{t-1}) \\ f(R_t | \Delta_{1,t}=0, \Delta_{2,t}=1, I_{t-1}) \\ f(R_t | \Delta_{1,t}=1, \Delta_{2,t}=0, I_{t-1}) \\ f(R_t | \Delta_{1,t}=1, \Delta_{2,t}=1, I_{t-1}) \end{pmatrix}, \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1} &= \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{1,t}=0, \Delta_{2,t}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t}=0, \Delta_{2,t}=1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t}=1, \Delta_{2,t}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t}=1, \Delta_{2,t}=1 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、 $\odot$ はベクトルの要素ごとを掛け合わせることを示す。本研究では収益率の誤差項 z_t は t 分布に従うと仮定しているため、 $f(R_t | \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l, I_{t-1})$ は

$$\begin{aligned} &f(R_t | \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l, I_{t-1}) \\ &= \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{(R_t - \mu_j)^2}{\sigma_{lt}^2 (v-2)} \right)^{-\frac{v+1}{2}} \\ &\quad (\sigma_{lt}^2)^{-\frac{1}{2}} (v-2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $j, l=1, 2$ であり、 μ_1 は(11)式で与えられる。また、 σ_{it}^2 は $V_{t-1}[R_t | \Delta_{2,t}=l]$ のことである。

(26)式の $\hat{\xi}_{it-1}$ は、Hamilton (1989) のフィルタリング手法 (ハミルトン・フィルタ) によって求める¹⁶⁾。 $\hat{\xi}_{it-1}$ を書き換えると

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{it-1} &= \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{1,t}=0, \Delta_{2,t}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t}=0, \Delta_{2,t}=1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t}=1, \Delta_{2,t}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t}=1, \Delta_{2,t}=1 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{1,t}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t}=1 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &\quad \otimes \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{2,t}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{2,t}=1 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^1 \Pr[\Delta_{1,t}=0, \Delta_{1,t-1}=i | I_{t-1}] \\ \sum_{i=0}^1 \Pr[\Delta_{1,t}=1, \Delta_{1,t-1}=i | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &\quad \otimes \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^1 \Pr[\Delta_{2,t}=0, \Delta_{2,t-1}=k | I_{t-1}] \\ \sum_{k=0}^1 \Pr[\Delta_{2,t}=1, \Delta_{2,t-1}=k | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^1 \Pr[\Delta_{1,t}=0 | \Delta_{1,t-1}=i] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=i | I_{t-1}] \\ \sum_{i=0}^1 \Pr[\Delta_{1,t}=1 | \Delta_{1,t-1}=i] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=i | I_{t-1}] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\otimes \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^1 \Pr[\Delta_{2,t}=0 | \Delta_{2,t-1}=k] \\ \Pr[\Delta_{2,t-1}=k | I_{t-1}] \\ \sum_{k=0}^1 \Pr[\Delta_{2,t}=1 | \Delta_{2,t-1}=k] \\ \Pr[\Delta_{2,t-1}=k | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{1,t-1}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=1 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &\quad \otimes \begin{pmatrix} q_{00} & q_{10} \\ q_{01} & q_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{2,t-1}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{2,t-1}=1 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{00} & q_{10} \\ q_{01} & q_{11} \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{1,t-1}=0, \Delta_{2,t-1}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=0, \Delta_{2,t-1}=1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=1, \Delta_{2,t-1}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=1, \Delta_{2,t-1}=1 | I_{t-1}] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

つまり、

$$\hat{\xi}_{it-1} = (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) \hat{\xi}_{t-1|t-1} \quad (27)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{t-1|t-1} &= \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{1,t-1}=0, \Delta_{2,t-1}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=0, \Delta_{2,t-1}=1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=1, \Delta_{2,t-1}=0 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{1,t-1}=1, \Delta_{2,t-1}=1 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{10} \\ q_{01} & q_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

t 時点までの情報 I_t が与えられたもとで、 $\Delta_{1,t} = j$ かつ $\Delta_{2,t} = l$ ($j, l=0, 1$) となる確率は、

$$\begin{aligned} \Pr[\Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_t] &= \Pr[\Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_{t-1}, R_t] = \frac{f(\Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l, R_t | I_{t-1})}{f(R_t | I_{t-1})} \\ &= \frac{f(R_t | \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l, I_{t-1}) \Pr[\Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_{t-1}]}{\sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^1 f(R_t, \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_{t-1})} \\ &= \frac{f(R_t | \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l, I_{t-1}) \Pr[\Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_{t-1}]}{\sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^1 f(R_t | \Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l, I_{t-1}) \Pr[\Delta_{1,t}=j, \Delta_{2,t}=l | I_{t-1}]} \end{aligned}$$

ベクトルで表すと,

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{(\eta_t \odot \hat{\xi}_{t|t-1})}{\mathbf{i}'(\eta_t \odot \hat{\xi}_{t|t-1})} \quad (28)$$

となる。以上の(27)式と(28)式を交互に繰り返すことによって、 $t=1, 2, \dots, T$ について $\hat{\xi}_{t|t-1}$ を計算し、(26)式に代入する。 $t=1$ 時点の $\Pr[\Delta_{1,1}, \Delta_{2,1}|I_0]$ の計算に必要な

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{1,0}=0, \Delta_{2,0}=0|I_0] \\ \Pr[\Delta_{1,0}=0, \Delta_{2,0}=1|I_0] \\ \Pr[\Delta_{1,0}=1, \Delta_{2,0}=0|I_0] \\ \Pr[\Delta_{1,0}=1, \Delta_{2,0}=1|I_0] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{1,0}=0|I_0] \\ \Pr[\Delta_{1,0}=1|I_0] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{2,0}=0|I_0] \\ \Pr[\Delta_{2,0}=1|I_0] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

には、定常確率

$$\Pr[\Delta_{1,0}=0|I_0] = \frac{1-p_{11}}{2-p_{00}-p_{11}},$$

$$\Pr[\Delta_{1,0}=1|I_0] = \frac{1-p_{00}}{2-p_{00}-p_{11}},$$

$$\Pr[\Delta_{2,0}=0|I_0] = \frac{1-q_{11}}{2-q_{00}-q_{11}},$$

$$\Pr[\Delta_{2,0}=1|I_0] = \frac{1-q_{00}}{2-q_{00}-q_{11}}$$

を用いる。

注

- 1) Markov Switching モデルは状態変数がマルコフ過程に従って推移するモデルであるが、本質的には混合分布のモデルの一種である。
- 2) ARCH 型モデルによる日経225オプション価格に関する実証研究のサーベイとして、三井 [2014b] を参照のこと。
- 3) Markov Switching モデルを用いた先行研究では、推定された推移確率は1に近い値をとることが多い。しかしながら、本論文では複数のモデルを取扱い、また、様々な限月に対応する標本期間について推定を行うことから、推定された推移確率のうち幾つかについては高くない可能性がある。本論文では価格トレンドやボラティリティのスイッチングが存在するものとしてオプションの評価を行うことを目的としているため、推移確率は高い値になるように制約を置くことにした。
- 4) 金融工学理論では収益率を連続複利方式で定義することが一般的であるが、本論文のように収益率が t 分布に従うケースでは、投資家のリスク中立性を仮定すること

が困難になってしまうことが知られている(詳しくは渡部(2003)を参照のこと)。したがって、(1)式の収益率 R_t は、

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

として定義する。ただし、 S_t は t 時点の原資産の価格である。

- 5) 利子率は正の値であることから、 $\mu_0 < 0$ とすれば(11)式より $\mu_0 < \mu_{1,t}$ が満たされる。
- 6) $\mu_0 < 0$ という制約から、 $\Delta_t = 0$ のとき市場はベア局面ということになるが、ブル局面、ベア局面においてボラティリティがそれぞれどのような値をとるかは、モデルを推定するまでは分からない。したがって、 σ_0^2 と σ_1^2 の大小関係については制約を置くことはしない。
- 7) (17)式の θ と γ については、パラメータの最尤推定を容易にするために定数とした。
- 8) MS(1)モデルのケースと同様に、(21)式の $\omega_0, \omega_1, \beta_0, \beta_1$ の大小関係については制約は置かない。
- 9) オプション価格を評価する T 時点においては、 T 時点から $T+1$ 時点にかけての無リスク資産利子率 r_{T+1} は既知であるが、その先の利子率は分からない。したがって、 T 時点から満期である $T+\tau$ 時点までの利子率は一定であると仮定し、 $r=r_{T+1}, r_{T+2}, \dots, r_{T+\tau}$ とにおいて現在価値を計算することになる。
- 10) 詳しくは、Satoyoshi and Mitsui (2011) の Appendix B を参照のこと。
- 11) 日経225オプションの終値と日経平均株価の終値とが異時点では値付けされている可能性があるが、本論文では考慮しなかった。また、基本的な仮定として、取引費用、税金、配当は存在せず、オプションの証拠金は不要とした。
- 12) 日経225オプション、日経平均株価、無担保コール翌日物のデータは、日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した。
- 13) パラメータの推定とモンテカルロ・シミュレーションには、プログラミング言語のOxMetrics 5.00 (<http://www.oxmetrics.net/>) を利用している。
- 14) MSEG モデルが通常の EGARCH モデルよりも優れているかどうかを厳密に判断するには、スイッチングが起きているかどうかを調べる検定を行う必要がある。しかし、一般に知られているように、Markov Switching が無いという帰無仮説のもとではモデルのいくつかのパラメータは識別することができず、検定統計量は通常の漸近分布に従わないため、尤度比検定は困難になってしまう。この問題点を考慮した検定手法としてはHansen (1992, 1996), Garcia (1998) があるが、本論文の目的はオプション価格の評価であるので、このような検定は行わないことにした。
- 15) 時点 T での権利行使価格 K 、残存期間 τ のヨーロピアン・コール・オプション価格 C_T^{BS} は、以下の式を用いて評価を行った。

$$C_T^{BS} = S_T N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_T/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

$$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, i=1, 2.$$

ここで、 $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数、 r は連続複利

方式の無リスク資産の利子率である。また、 σ に関しては過去20日分の原資産価格収益率の標準偏差 (Historical Volatility; HV) を使い、HV を次のように計算した。

$$\sigma_{HV} = \sqrt{\frac{1}{20-1} \sum_{t=1}^{20} (R_t - \bar{R})^2}$$

ただし、 $\bar{R}$ は20日間の R_t の平均値である。

16) 詳細は Kim and Nelson (1999) を参照のこと。

参 考 文 献

- 大鋸崇・大屋幸輔 [2009] 「株式市場におけるブル相場、ベア相場の日次データを用いた分析? ベイジアンアプローチ」『ジャフィー・ジャーナル (金融工学と市場計量分析)』, 112-150頁。
- 里吉清隆・三井秀俊 [2007] 「期待収益率スイッチング・モデルによる日経225オプションの実証研究」『産業経営研究』第29号, 日本大学経済学部産業経営研究所, 115-136頁。
- 里吉清隆・三井秀俊 [2011] 「原資産価格のブル・ベアを考慮したオプション価格付けの実証研究」『産業経営研究』第33号, 日本大学経済学部産業経営研究所, 63-87頁。
- 里吉清隆・三井秀俊 [2013] 「原資産の収益率に歪みがある場合のオプション評価—混合正規EGARCHモデルによる分析—」『日本統計学会誌』第43巻, 第1号, 1-23頁。
- 竹内明香 [2006] 「日経225オプション価格の実証分析—ARCH, ARCH-t, SVモデルによる比較」『一橋経済学』1巻, 2号, 187-208頁。
- 竹内 (野木森) 明香・渡部敏明 [2008] 「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」『現代ファイナンス』No.24, 45-74頁。
- 三井秀俊 [2000] 「日経225オプション価格のGARCHモデルによる分析」『現代ファイナンス』No.7, 57-73頁。
- 三井秀俊 [2014a] 「日経平均株価の長期トレンド分析」『先物・オプションレポート』Vol.26, No.5, 大阪取引所, 1-7頁。(<http://www.ose.or.jp/f/general/cms/pages/16040/wysiwyg/merk1405.pdf>)
- 三井秀俊 [2014b] 「ARCH型モデルによる日経225オプションの実証研究に関するサーベイ」日本証券経済研究所『証券経済研究』第87号, 41-60頁。
- 三井秀俊・渡部敏明 [2003] 「ベイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」『日本統計学会誌』第33巻, 第3号, 307-324頁。
- 森保洋 [1999] 「ARCHモデルによる日経225オプション評価」『現代経済学研究』第7号, 143-159頁。
- 渡部敏明 [2003] 「日経225オプションデータを使ったGARCHオプション価格付けモデルの検証」『金融研究』第22巻, 別冊第2号, 1-34頁。
- Alexander C. and E. Lazar [2009] “Modelling regime-specific stock price volatility,” *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol.71, pp.761-797.
- Badescu A., R. Kulperger and E. Lazar [2008] “Option valuation with normal mixture GARCH models,” *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol.12, pp.1-40.
- Bauwens L. and M. Lubrano [1998] “Bayesian inference on GARCH models using the Gibbs sampler,” *The Econometrics Journal*, Vol.1, No.1, pp.23-46.
- Bauwens L. and M. Lubrano [2002] “Bayesian option pricing using asymmetric GARCH models,” *Journal of Empirical Finance*, Vol.9, No.3, pp.321-342.
- Christoffersen P. and K. Jacobs [2004] “Which GARCH model for option valuation?” *Management science*, Vol.50, No.9, pp.1204-1221.
- Christoffersen P., S. Heston and K. Jacobs [2006] “Option valuation with conditional skewness,” *Journal of Econometrics*, Vol.131, pp.253-284.
- Duan J. and H. Zhang [2001] “Pricing Hang Seng Index options around the Asian financial crisis? A GARCH approach,” *Journal of Banking*

- & *Finance*, Vol.25, No.11, pp.1989-2014.
- Engle R. F. and C. Mustafa [1992] "Implied ARCH models from options prices," *Journal of Econometrics*, Vol.52, No. 1, pp.289-311.
- Garcia R. [1998] "Asymptotic null distribution of the likelihood ratio test in Markov switching models," *International Economic Review*, Vol.39, pp.763-788.
- Haas M., S. Mittnik and M. S. Paoletta [2004] "A new approach to Markov-switching GARCH models," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 2, No. 4, pp.493-530.
- Hamilton J. D. [1989] "A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, Vol.57, pp.357-384.
- Hansen B. E. [1992] "The likelihood ratio test under nonstandard conditions: testing the Markov switching model of GNP," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 7, S 1, pp.S61-S82.
- Hansen B. E. [1996] "Erratum: the likelihood ratio test under nonstandard conditions: testing the Markov switching model of GNP," *Journal of Applied Econometrics*, Vol.11, No. 2, pp.195-198.
- Isogai A., S. Kanoh and T. Tokunaga [2008] "A further extension of duration-dependent models," *The European Journal of Finance*, Vol.14, No. 5, pp.427-449.
- Kim C. and C. R. Nelson [1999], *State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications*, The MIT press.
- Maheu J. M. and T. H. McCurdy [2000] "Identifying bull and bear markets in stock returns," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol.18, No. 1, pp.100-112.
- Noh J., R. F. Engle and A. Kane [1994] "Forecasting volatility and option prices of the S&P 500 index," *The Journal of Derivatives*, Vol. 2, No. 1, pp.17-30.
- Sabbatini M. and O. Linton [1998] "A GARCH model of the implied volatility of the Swiss market index from option prices," *International Journal of Forecasting*, Vol.14, No. 2, pp.199-213.
- Saez M. [1997] "Option pricing under stochastic volatility and stochastic interest rate in the Spanish case," *Applied Financial Economics*, Vol. 7, No. 4, pp.379-394.
- Satoyoshi K. and H. Mitsui [2011] "Empirical study of Nikkei 225 options with the Markov Switching GARCH model," *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol.18, No. 1, pp.55-68.
- Schaller H. and S. V. Norden [1997] "Regime switching in stock market returns," *Applied Financial Economics*, Vol. 7, No. 2, pp.177-191.
- Shibata M. [2012] "Identifying bull and bear markets in Japan," *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol.19, No. 2, pp.99-117.
- Ubukata M. and T. Watanabe [2014] "Pricing Nikkei 225 options using realized volatility," *Japanese Economic Review*, Vol.65, No. 4, pp.431-467.
- 里吉清隆 (東洋大学経済学部准教授)
三井秀俊 (日本大学経済学部教授)