

# ARCH 型モデルによる日経225オプションの 実証研究に関するサーベイ

三井秀俊

## 要 旨

本論文は、ボラティリティ変動モデルである ARCH 型モデルによる日経225オプション評価の実証研究に関してサーベイを行なったものである。ARCH 型モデルは金融時系列データの非線形性をうまく捉え、金融市場の特性に合わせてモデルを拡張することが可能なことからオプションの実証研究に対しても有効であると考えられる。日経225オプションの実証研究で用いられてる ARCH 型モデルは、GARCH モデル、EGARCH モデル、GJR モデル、FIEGARCH モデルとこれらのモデルを応用した MS-GARCH モデル、混合正規 EGARCH モデル、混合  $t$ EGARCH モデルなどである。日経225オプションのようなヨーロッパン・オプションは、オプション評価を行なう際に、原資産となる日経225株価収益率のデータにより ARCH 型モデルのパラメータの推定を行ない、推定されたパラメータを用いてモンテカルロ・シミュレーションによりコール・オプション価格とプット・オプション価格を求めることができる場合が多い。実際に ARCH 型モデルによるオプション評価は、Black-Scholes モデルよりもオプション価格を正確に捉えることができるかどうか、また、どの ARCH 型モデルを利用することがオプション評価に適しているかどうかには焦点を当てサーベイを行なった。

## 目 次

- |                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>I. はじめに</p> <p>II. オプション分析における ARCH 型モデルとオプション評価</p> <p>    1. ARCH 型モデル</p> <p>    2. モンテカルロ・シミュレーションによるオプション価格の導出</p> <p>III. GARCH モデル, GJR モデル, EGARCH モデルによるオプション価格付け</p> | <p>1. リスク中立性によるオプション評価</p> <p>2. 局所リスク中立性によるオプション評価</p> <p>3. 原資産収益率の裾が厚い分布を考慮したオプション評価</p> <p>IV. ベイズ推定法によるオプション評価</p> <p>    1. ARCH 型モデルのベイズ推定法</p> <p>    2. ベイズ推定によるオプション価格の導出</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- V. 長期記憶モデルによるオプションによるオプション価格付け
- VI. ARCH型モデルの応用によるオプション価格付け
  - 1. Markov-Switchingモデルによるオプション

- 評価
- 2. 原資産収益率の分布の歪みを考慮したオプション評価
- VII. まとめと今後の展望

## I. はじめに

オプション評価理論では、Black and Scholes [1973]が株式のヨーロッパ・オプション<sup>1)</sup>に対してBlack-Scholesモデル(以下、B-Sモデル)として理論的な解を与えた。その後、Merton [1973]がBlack and Scholes [1973]とは異なるアプローチでB-Sモデルが数学的に正しいことを証明し、Black-Scholesの公式と命名して以来、オプション価格付けに関する理論・実証研究は飛躍的に増加した。また、Merton [1973]はB-Sモデルを配当がある場合の株式オプションに関して拡張し、Garman and Kohlhagen [1983]は通貨オプションにも適用できるようにB-Sモデルを改良した。そのため、B-Sモデルとその拡張モデルは株式、株価指数、通貨を原資産とするヨーロッパ・オプションに一般的に実務の世界でも利用されるようになった。オプション評価の実証研究に際しては、B-Sモデルとパフォーマンスを比較して新しいオプション価格付けモデルの評価を行なうようになり、B-Sモデルは実務家や研究者の間においてベンチマークとなった。

しかしながら、B-Sモデルはある強い仮定の下でしか成立しない。特に、「無リスク資産利子率は一定」と「ボラティリティ<sup>2)</sup>は一定」の2つの仮定は、当初より非現実的な仮定で

あった。実際に、金融市場では無リスク資産利子率は変動し、ボラティリティも多くの実証研究において時間を通じて変動していることが明らかにされている。また、オプション市場では、ボラティリティが取引されると言っても過言ではない。したがって、ボラティリティが変動するモデルを定式化してオプション評価を行なうことは非常に重要であると考えられる。本論文における日経225オプション<sup>3)</sup>の実証研究のサーベイでは「ボラティリティ変動」に焦点を当てることにする。

ボラティリティ変動に関してオプション評価を分析する場合には大きく2つに分けて研究が行なわれている<sup>4)</sup>。1つは、確率的分散変動(Stochastic Volatility; SV)モデルを用いる方法である。連続時間のSVモデルは、オプション評価に有効な方法である。しかし、SVモデルはボラティリティを観測されない変数として扱っているため尤度を求めることが難しいことや金融市場の特質に合わせてモデルを拡張することが難しいなどの難点がある。したがって、SVモデルによるオプション評価に関する実証研究は非常に少なく、日経225オプションに関する実証研究としては、三井 [1998]、竹内 [2006] など僅かしかない。

もう1つの方法は、Engle [1982]のARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)モデルとそれを一般化したBollerslev [1986]のGARCH (Generalized-ARCH)モデル

を用いる方法である。これら ARCH 型モデル<sup>5)</sup>はファイナンス時系列の非線形性をうまく捉え、オプションの実証研究に対しても有効である。これは、ARCH 型モデルが  $t$  期のボラティリティを  $t-1$  期に既知の変数のみの確定的な関数として定式化し、モデルを拡張しても容易に推定することができるためである。株式市場でよくみられる現象として、現在のボラティリティと前日の収益率との間には負の相関（非対称性）があることが知られている。しかし、GARCH モデルでは、このようなボラティリティ変動の非対称性は捉えることができない。そこで、ボラティリティ変動の非対称性を捉えるために、Nelson [1991] は EGARCH (Exponential-GARCH) を提案し、Glosten *et al.* [1993] は GJR モデルを提案した。また、ボラティリティには長期記憶性があることが知られており、長期記憶性を捉えるため Baillie *et al.* [1996] は FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) モデルを提案し、Bollerslev and Mikkelsen [1996] は FIEGARCH モデルを提案した。

ARCH 型モデルを利用した日経225オプション評価に関する実証研究としては、森保 [1999]、三井 [2000]、三井・渡部 [2003]、渡部 [2003]、竹内 [2006]、竹内 (野木森)・渡部 [2008]、Satoyoshi and Mitsui [2011]、里吉・三井 [2013] がある。森保 [1999] は、GARCH モデルと GJR モデルを用いて投資家のリスク中立性を仮定して実証研究を行なっている。三井 [2000] は、GARCH モデルを用いてオプション価格の導出の際に Duan [1995] の局所中立性 (Locally Risk-Neutral Valuation Relationship; LRNVR) を利用している。渡部 [2003]、竹内 [2006] は、GARCH モデル、

GJR モデル、EGARCH モデルに対して原資産収益率の分布に  $t$  分布を仮定してオプション評価を行なっている。また、竹内 [2006] では、ARCH 型モデルと SV モデルによるオプション評価の比較を行なっている。竹内 (野木森)・渡部 [2008] はボラティリティの長期記憶性に着目し、FIEGARCH モデルを利用している。Satoyoshi and Mitsui [2011] は、Markov-Switching モデル (以下、MS モデル) を応用した MS-GARCH モデルによるオプション評価を提案している。また、里吉・三井 [2013] は、収益率の分布の裾の厚さと左右非対称性を捉えるために混合正規分布、混合  $t$  分布と EGARCH モデルを組み合わせた混合正規 EGARCH モデル、混合  $t$  EGARCH モデルにより分析を行なっている。本論文では、これらの ARCH 型モデルによる日経225オプションの実証研究に関してサーベイを行なう<sup>6)</sup>。

本論文の以下の構成は次の通りである。II 節では、オプション分析における ARCH 型モデルとオプション評価について概観する。ARCH 型モデルの簡単な説明とモンテカルロ・シミュレーションを利用したオプション評価について解説する。III 節では、GARCH モデル、GJR モデル、EGARCH モデルによるオプション価格付けについて述べ、リスク中立性と局所リスク中立性によるオプション評価に関してサーベイを行なう。また、原資産収益率の裾の厚さを考慮したオプション評価についてもサーベイを行なう。IV 節では、ベイズ推定法によるオプション評価について纏める。V 節では、FIEGARCH モデルを利用した長期記憶モデルによるオプション評価の実証研究について説明する。VI 節では、ARCH 型モデルの応用によるオプション評価についてサーベイを行なう。

MS-GARCH モデルと原資産収益率の分布の歪みを考慮したオプション評価に関して解説する。最後のⅦ節では、まとめと今後の展望について述べる。

## Ⅱ. オプション分析における ARCH 型モデルとオプション評価

### 1. ARCH 型モデル

日経225オプションの実証研究で用いられる ARCH 型モデルは、ほとんどが GARCH モデル、EGARCH モデル、GJR モデル、FIEGARCH モデルである。これらの時系列モデルを用いる場合には、AIC (Akaike's Information Criterion) や SIC (Schwarz's Information Criterion) などの情報量基準を用いてモデルの次数選択を行わなければならないが、多くの実証研究においてボラティリティ変動過程の次数を多くしてもあまりパフォーマンスは改善されることが示されている。したがって、実証分析では GARCH(1,1) モデル、GJR(1,1) モデル、EGARCH(1,1) モデル、FIEGARCH(1,  $d$ , 0) モデルを利用することが多い。以下では、これらのモデルに関して概観する。

時点  $t$  での日経225株価収益率  $R_t$  の過程を以下のようにおく。

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad (1)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad (2)$$

$$z_t \sim i.i.d.E[z_t] = 0, \quad Var[z_t] = 1. \quad (3)$$

ここで、定数項  $\mu$  は期待収益率、 $z_t$  は誤差項であり、収益率に自己相関は無いと仮定する。 $i.i.d.$  は、過去と独立で同一な分布 (independently and identically distributed) を表す。ボ

ラティリティ  $\sigma_t^2$  の過程を以下のような (A)–(D) のように定式化する。

(A) GARCH(1,1) : ボラティリティ  $\sigma_t^2$  は過去の予測誤差の 2 乗と過去のボラティリティの線形の関数として定式化されている。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \epsilon_{t-1}^2. \quad (4)$$

ここで、ボラティリティの非負性を保証するため  $\omega, \alpha, \beta > 0$  であると仮定する。また、ボラティリティの過程に対して定常性を保証するため  $\alpha + \beta < 1$  であると仮定する。

(B) EGARCH(1,1) : ボラティリティの対数値を被説明変数としてパラメータの非負制約を取り除き定式化されている。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma z_{t-1} + \alpha (|z_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}). \quad (5)$$

$\gamma < 0$  ならば、株価が上昇した日の翌日よりも、株価が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する。このモデルでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としているため  $\omega, \beta, \gamma, \alpha$  に非負制約は必要としない。定常性の条件のため  $0 < \beta < 1$  だけ仮定すればよいが、過去の多くの実証研究の結果を考慮して  $\omega, \alpha > 0, \gamma < 0$  であると仮定する。

(C) GJR(1,1) :  $\epsilon_{t-1}$  が負のときには 1、それ以外のときには 0 であるダミー変数  $D_{t-1}$  を用いることにより、ボラティリティの非対称性を捉えるように定式化されている。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1} \epsilon_{t-1}^2, \quad (6)$$

$$D_{t-1} = \begin{cases} 1 & \epsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\gamma > 0$  ならば、株価が上昇した日の翌日よりも、株価が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する。ここでも、ボラティリティの非負性を保証するため  $\omega, \alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha + \beta < 1$  であ

ると仮定する。

(D) FIEGARCH(1,  $d$ , 0) : ボラティリティの長期性を捉えるため、以下のように定式化されている。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta(L)]^{-1}(1-L)^{-d}g(z_{t-1}), \quad (7)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + r[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

$\theta < 0$  ならば、株価が上昇した日の翌日より、株価が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する。このモデルでは、EGARCHモデルと同様にボラティリティの対数値を被説明変数としているため  $\omega, \beta, \alpha, \theta, \gamma$  に非負制約は必要としない。 $(1-L)^d$  における  $d$  が長期記憶性<sup>7)</sup>を捉えるパラメータを示す。 $0 < d < 1$  となるとき、ボラティリティ  $\sigma_t^2$  は長期記憶過程に従っている。また、 $0 < d < 0.5$  のとき定常長期記憶過程と呼び、 $0.5 \leq d < 1$  のとき非定常長期記憶過程と呼ぶ。 $d=0$  のとき、ボラティリティ  $\sigma_t^2$  は単位根を持ち非定常過程となる。 $d=0$  のとき短期記憶過程となり  $d=0$  のとき、Nelson [1991] の EGARCH(1, 0) モデルとなる。 $(1-L)^d$  は、以下のように表現される。

$$(1-L)^d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} L^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!} (-L)^k. \quad (8)$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数 (gamma function)<sup>8)</sup>を表す。

ここで、(3)式の分布を特定化しパラメータの推定を最尤法などを用いて行なえば良い。オプション評価を行なうためには、推定されたパラメータを用いてモンテカルロ・シミュレーション (Monte Carlo simulation) によりオプション価格を導出するのが一般的である。

## 2. モンテカルロ・シミュレーションによるオプション価格の導出

投資家がリスク中立的な場合、日経225オプションのようなヨーロッパン・オプションの価格は、リスク・プレミアム (risk premium) が存在しないため満期におけるオプション価格の期待値を無リスク資産の利率  $r$  で割り引いた割引現在価値となる<sup>9)</sup>。 $t$  時点の評価日、 $T$  時点を満期日、 $C_t$  を権利行使価格  $K$  のコール・オプションの  $t$  時点の価格、 $P_t$  をプット・オプションの価格とすると、 $C_t$  と  $P_t$  は、各々、以下の式で表される。

$$C_t = e^{-(T-t)r} E [\text{Max}(S_T - K, 0)], \quad (9)$$

$$P_t = e^{-(T-t)r} E [\text{Max}(K - S_T, 0)]. \quad (10)$$

ここで、 $S_T$  はオプションの満期の原資産価格である。ARCH型モデルの場合、右辺の期待値を解析的に求めることができないので、一般的にモンテカルロ・シミュレーションによって評価する。シミュレーションを  $N$  回行ない、 $N$  個の満期の原資産価格  $S_T$  が得られたとして、これらを  $(S_T^{(1)}, S_T^{(2)}, \dots, S_T^{(N)})$  とする。ただし、 $S_T^{(i)}$  は  $i$  回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である。 $N$  が十分に大きいとき、大数の法則 (law of large number) より(9)式と(10)式は、各々、以下の式によって評価することができる。

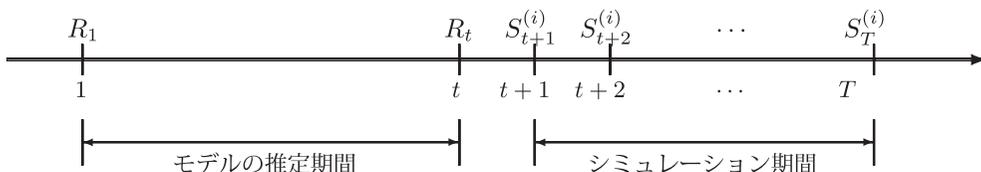
$$C_t \approx e^{-(T-t)r} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(S_T^{(i)} - K, 0), \quad (11)$$

$$P_t \approx e^{-(T-t)r} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(K - S_T^{(i)}, 0). \quad (12)$$

また、モンテカルロ・シミュレーションの精度を高めるために、様々な分散減少法 (variance reduction method) が考案されている<sup>10)</sup>。

図表1には、モデルの推定とモンテカルロ・

図表1 モデルの推定とモンテカルロ・シミュレーションの期間；里吉・三井 [2013]



シミュレーションの期間が描かれている。 $R_1$  から  $R_t$  までの日経225株価収益率のデータにより ARCH 型モデルのパラメータを推定を行なう。次に、推定されたパラメータを基にしてモンテカルロ・シミュレーションにより満期日  $T$  での日経225株価  $S_T^{(i)}$  を求め、最後に割引現在価値の期待値としてオプション価格  $C_t$ 、 $P_t$  を導出することができる。

### Ⅲ. GARCH モデル, GJR モデル, EGARCH モデルによるオプション価格付け

#### 1. リスク中立性によるオプション評価

森保 [1999] は、原資産となる日経225の価格変動が以下のような GARCH(1,1)モデルと GJR(1,1)モデルに従っていると仮定している。月曜日の収益率の分散が他の曜日に比べて大きいことから曜日効果を取り入れたモデルとなっている<sup>11)</sup>。ここでの GARCH(1,1)モデルは、

$$R_t = \sigma_t z_t, \sigma_t > 0, \quad (13)$$

$$z_t \sim i.i.d.N(0, 1), \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_t^2}{n_t^\delta} = \omega + \beta \frac{\sigma_{t-1}^2}{n_{t-1}^\delta} + \alpha \frac{R_{t-1}^2}{n_{t-1}^\delta} \quad (15)$$

と定式化している<sup>12)</sup>。ここで、 $n_t$  は  $(t-1)$  営業日と  $t$  営業日との間の「休業日数+1」( $t$  営業日の何日前が  $(t-1)$  営業日となるかを示す)、 $\delta$  は  $t$  営業日でのボラティリティの

ピードを表す。例えば、「 $t =$  月曜日」で前営業日が金曜日ならば、 $n_t = 3$  であり、ボラティリティは  $n_t^\delta$  倍増加する。また、GJR(1,1)モデルは、収益率過程(13)式、 $z_t$  の分布の仮定(14)式と、

$$\frac{\sigma_t^2}{n_t^\delta} = \omega + \beta \frac{\sigma_{t-1}^2}{n_{t-1}^\delta} + \alpha \frac{R_{t-1}^2}{n_{t-1}^\delta} + \gamma D_{t-1}^- \frac{R_t^2}{n_{t-1}^\delta}, \quad (16)$$

$$D_{t-1}^- = \begin{cases} 1 & z_{t-1} < 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定式化している。

日経225の標本期間は1998年9月1日から1995年12月7日までであり、標本数は799である。GARCH(1,1)モデルとGJR(1,1)モデルのパラメータの推定には、最尤法 (Maximum Likelihood method; ML) を利用している。オプション評価の際には、投資家のリスク中立性を仮定し、(11)、(12)式によるモンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を導出している。ここでは、分散減少法は用いていない。日経225オプションの標本期間は1993年1月限月から1995年12月限月までであり、標本数はコール・オプションが16241、プット・オプションが16729である。無リスク資産利子率  $r$  については、1ヶ月物 CD (Certificate of Deposit) を用いている。モデルのパフォーマンスの評価に関しては、以下のような平均絶対乖離率 (Mean Absolute Percentage Deviation; MAPD) を用いて比較を行なっている。

$$MAPD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\bar{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}|}{X_i^{\text{市場価格}}}, X=C, P. \quad (17)$$

ここで、 $\bar{X}_i^{\text{推定値}}$  はモンテカルロ・シミュレーションによるオプションの推定値、あるいは、B-S モデルの理論価格を表し、 $X_i^{\text{市場価格}}$  はオプションの市場価格、 $C$  はコール・オプションの価格、 $P$  はプット・オプションの価格を表す。 $N$  は標本サイズである。マネネス別の分析はここでは行っていない。

実証分析では、価格水準が高いオプションを過大評価し、価格水準が低いオプションを過小評価する傾向があるという結果を得ている。また、GARCH(1,1)モデル、GJR(1,1)モデルのオプション価格とも B-S モデルのオプション価格よりも市場価格との乖離率が小さいことを示しており、特に、プット・オプションと OTM オプションで顕著であるという結果を得ている。また、GARCH(1,1)モデルと GJR(1,1)モデルとのオプション価格を比較すると、GJR(1,1)モデルの方が市場価格との乖離率が若干小さくなることを示している。

## 2. 局所リスク中立性によるオプション評価

Ⅲ. 1.での森保 [1999] の用いたような伝統的なリスク中立性を仮定したモデルに対して、Duan [1995] はリスク中立測度に GARCH を変換させることにより GARCH モデルによるオプション価格付けの方法を発展させた。三井 [2000] は、この Duan [1995] の方法を(4)、(14)式と収益率  $R_t$  の過程が以下にしたがうような GARCH(1,1)モデルに適用することにより分析を行なっている。

$$R_t = r + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t. \quad (18)$$

ここで、 $\lambda$  は一定の単位リスク・プレミアムを表す。GARCH オプション価格付けモデルでのリスク中立評価は、資産収益過程の分散不均一性を調整するために一般化しなければならない。そこで、Duan [1995] は局所リスク中立性 (LRNVR)<sup>13)</sup> を利用した。真の確率測度  $P$  に対して  $Q$  をリスク中立測度とすると、LRNVR は確率測度  $Q$  の下で(4)、(14)、(18)式は、

$$R_t = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t, \quad (19)$$

$$\xi_t | \Omega_{t-1} \sim i.i.d.N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_j \sigma_{t-1}^2 + \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sigma_{t-1})^2 \quad (20)$$

となる。ここで、 $\Omega_{t-1}$  は時点  $t-1$  を含む  $t-1$  時点までの利用可能な情報集合である。リスクは確率測度  $Q$  の下で局所的に中立化されているが、単位リスク・プレミアム  $\lambda$  はボラティリティの過程に影響を及ぼしている。したがって、満期  $T$ 、権利行使価格  $K$  のヨーロッパアン・コール・オプション価格は、

$$C_t = e^{-(T-t)r} E^Q [\text{Max}(S_T - K, 0) | \Omega_t] \quad (21)$$

と表現される。プット・オプションについては、ここではプット・コール・パリティ式により導出している。

日経225の標本期間は、1991年1月7日から1997年12月30日までであり、標本数は1725である。GARCH(1,1)モデルと GJR(1,1)モデルのパラメータの推定には、疑似最尤法 (Quasi-Maximum Likelihood method; QML) を利用している。オプション評価には、(21)式に対してモンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を導出している。モンテカルロ・シミュレーションの分散減少法には制御変数法を利用している。日経225オプションの標本期間は1995年1月限月から1997年12月限月までであり、標本数はコール・オプションが262、

図表2 マネネスによるオプションの分類；三井 [2000]

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM

(注)  $S$  は原資産価格,  $K$  は権利行使価格を表す。

プット・オプションが269である。無リスク資産利子率 $r$ には、コール・レートを使用している。モデルのパフォーマンスの評価に関しては、以下のように平均誤差率 (Mean Error Rate; MER) と平均2乗誤差率の平方根 (Root Mean Square Error Rate; RMSER) を計算し、各モデルの比較を行なっている。

$$MER = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right), \quad (22)$$

$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right)^2},$$

$$X = C, P. \quad (23)$$

MER の値を計算することにより、モデルの推定値が市場価格と比べてどの程度バイアスを持っているかが明らかになる。もう1つのRMSERは、推定値と市場価格の乖離度を示す基準である。マネネスは、Bakshi *et al.* [1997] を参考にして図表2のように5種類のカテゴリーに分類している。

コール・オプションでは、MER からDOTM, OTM と ITM, DITM の B-S モデルの underpricing を修正できることがわかる。特に、OTM で顕著である。また、RMSER から理論値と市場価格の乖離率はすべてのマネネスにおいて GARCH オプションの方が小さく

なるという結果となっている。これは、GARCH オプションは B-S モデルよりも価格付けのパフォーマンスが優れていることを意味する。プット・オプションでは、MER に関しては、コール・オプションと同様の結果が得られ、RMSER に関しては DOTM において GARCH オプションは B-S モデルよりも価格付けのパフォーマンスが優れているわけではないことがわかる。しかし、他のマネネスでは理論値と市場価格の乖離率は GARCH オプションの方が小さくなるという結果となった。全体的にみれば、GARCH オプションのパフォーマンスは優れているという結果を得ている。

### 3. 原資産収益率の裾が厚い分布を考慮したオプション評価

資産収益率の分布は、古くから Mandelbrot [1963], Fama [1965] で指摘されているように正規分布よりも裾が厚い分布であることが知られている<sup>14)</sup>。渡部 [2003] では、この点を考慮して GARCH (1,1) モデル, EGARCH (1,1) モデル, GJR (1,1) モデルの誤差項の分布に対して、 $t$  分布を仮定して日経225オプションの実証研究を行なっている。ここでは、原資産となる日経225株価収益率 $R_t$ の過程とボラティリティ $\sigma_t^2$ の過程を(1)-(6)式で定式化している。(3)

式の $z_t$ の分布の仮定を以下のようにおく。

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu) \quad (24)$$

ここで、 $\nu$ は自由度 (degree of freedom) を表す。 $R_t$ の過程として、(1)式とは異なる過程でも定式化を行なっている。一つは、リスクとリターンのトレード・オフを考慮に入れ、

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t \quad (25)$$

と定式化している。もう一つは、日経225のような株価指数は、収益率に正の自己相関が生じやすいためリスク中立性を仮定しない場合の $R_t$ の過程を以下のように定式化している。

$$R_t = \mu + a + bR_{t-1} + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t. \quad (26)$$

ここで、 $a=b=\lambda=0$ であれば、(1)式と同じになる。

オプション価格の導出には、投資家のリスク中立性を仮定した場合と三井 [2000] と同様に Duan [1995]の局所リスク中立性を仮定した場合に関して分析を行なっている。Duan [1995]のリスク中立測度に従い、GARCH(1,1)モデルを変換すると(20)式となり、EGARCH(1,1)モデルとGJR(1,1)モデルを変換すると、各々、以下ようになる。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma D_{t-1})(\epsilon_{t-1} - \lambda \sigma_{t-1})^2, \quad (27)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma(z_{t-1} - \lambda) + \alpha \left( |z_{t-1} - \lambda| - \sqrt{2/\pi} \right). \quad (28)$$

これらのモデルに従い、(11)、(12)式でオプション価格を導出している。ここでは、分散減少法として制御変数法と負相関法を併せて用いてモンテカルロ・シミュレーションによりオプション評価を行なっている。日経225の標本期間は1991年2月26日から2009年12月9日までである。ARCH型モデルのパラメータの推定には、疑似最尤法を利用している。日経225オプシ

ンの標本期間は1997年5月限月から2002年4月限月までであり、標本数はコール・オプションが609、プット・オプションが662である。満期日まで30日のオプションの終値を対象としている。無リスク資産利率としては、1ヶ月物のコール・レートを用いている。モデルのパフォーマンス評価に関しては、三井 [2000] と同様に(22)式と(23)式のMERとRMSERと図表2の5つのカテゴリーのマネネスの分類で行なっている。

日経225オプションの実証分析では、以下の結果が得られている。Duan [1995]の局所リスク中立性を用いても、投資家のリスク中立性でオプションを評価した場合よりパフォーマンスが良くなるわけではない。また、原資産となる日経225株価収益率の分布に対して、裾の厚い $t$ 分布を仮定してGARCH, EGARCH, GJRモデルを推定しても、ボラティリティの変動についてはより上手く捉えることができるが、オプション評価に対しては有効性が検証されない。株式市場での非対称性に関して、GARCHモデルとEGARCH, GJRモデルによるオプション評価のパフォーマンスはマネネスによって異なる。すなわち、コール・オプションではDOTM, OTMにおいて、プット・オプションではITM, DITMにおいてEGARCH, GJRモデルのパフォーマンスがGARCHモデルよりも良い。また、コール・オプションではITM, DITMにおいて、プット・オプションではDOTM, OTMにおいてGARCHモデルのパフォーマンスがEGARCH, GJRモデルよりも良くなっている。EGARCHモデルとGJRモデルを比較した場合には、一部のマネネスを除いて、全体的にGJRモデルがオプション評価には優れていることを明らかにしている。

また、竹内 [2006] でも、GARCH, EGARCH, GJR, QGARCH モデルに対して、収益率の分布に標準正規分布と裾の厚い  $t$  分布を仮定して日経225オプションの実証研究を行っている。渡部 [2003] の実証結果と同様に、 $t$  分布を仮定してもオプション評価に対しては有効性がないことを明らかにしている。

## IV. ベイズ推定法によるオプション評価

### 1. ARCH 型モデルのベイズ推定法

三井 [2000] の研究で用いられている GARCH モデルでは、ボラティリティ変動の非対称性を捉えることができない。また、疑似最尤法によりパラメータの推定を行ない、推定されたパラメータが真の値であると仮定してリスク中立測度の下で原資産価格を計算しているため、パラメータ推定に伴う誤差を考慮していないことが問題となる。三井・渡部 [2003] では、これらの問題点に対処するためボラティリティ変動の非対称性を考慮した EGARCH (1,1) モデルと GJR (1,1) モデルについても分析を行ない、MCMC (Markov-chain Monte Carlo) を用いたベイズ推定法で実証研究を行っている。

収益率の過程と誤差項は、三井 [2000] と同様に(14), (18)式で定式化している。また、実証研究ではリスク・プレミアム  $\lambda$  を考慮しないケースに関しても分析を行っている。GARCH (1,1), EGARCH (1,1), GJR (1,1) のボラティリティの変動過程は、各々、(4), (5), (6)式を利用している。未知のパラメータを推定するためにベイズ推定法を用いる場合には、事

前分布を設定しなければならない。そこで、それぞれのモデルに対して以下のような事前分布を設定する。(18)式のリスク・プレミアム  $\lambda$  の事前分布は、

$$f(\lambda) \propto I[\lambda > 0] \quad (29)$$

とおく。ここで、 $I[\cdot]$  は括弧内の区間では 1、それ以外では 0 となる関数 (indicator function) である。GARCH (1,1), EGARCH (1,1), GJR (1,1) モデルのパラメータの事前分布は以下のようなになる<sup>15)</sup>。

(A) GARCH (1,1) : 未知のパラメータ  $\omega, \alpha, \beta$  に対して、

$$\begin{aligned} f(\ln(\omega)) &\propto \text{const}, \\ f(\alpha, \beta) &\propto I[\alpha > 0] I[\beta > 0] I[\alpha + \beta < 0]. \end{aligned} \quad (30)$$

(B) EGARCH (1,1) : 未知のパラメータ  $\omega, \alpha, \beta, \gamma$  に対して、

$$\begin{aligned} f(\omega) &\propto \text{const}, \\ f(\beta) &\propto I[0 < \beta < 1], f(\alpha) \propto I[\alpha > 0], \\ f(\gamma) &\propto I[\gamma < 0]. \end{aligned} \quad (31)$$

(C) GJR (1,1) : 未知のパラメータ  $\omega, \alpha, \beta, \gamma$  に対して、

$$\begin{aligned} f(\ln(\omega)) &\propto \text{const}, \\ f(\alpha, \beta) &\propto I[\alpha > 0] I[\beta > 0] I[\alpha + \beta < 1], \\ f(\gamma) &\propto I[\gamma > 0]. \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、const は正の定数を表す。未知のパラメータ集合を  $\Theta$  とする。このとき、事後分布 (posterior distribution) は以下のように与えられる。

$$f(\Theta | \text{data}) \propto f(\text{data} | \Theta) f(\Theta). \quad (33)$$

ここで、 $f(\Theta | \text{data})$  は尤度、 $f(\Theta)$  は事前分布を表す。事後分布からパラメータ集合をサンプリングするために、Tierney [1994] の提案した

A-R/M-H (Acceptance-Rejection/Metropolis-Hastings) アルゴリズムを用いている<sup>16)</sup>。

## 2. ベイズ推定によるオプション価格の導出

三井・渡部 [2003] では、三井 [2000]、渡部 [2003] と同様に Duan [1995] の局所リスク中立性を仮定してオプション評価を行なっている。Duan [1995] のリスク中立測度に従い、GARCH (1,1), EGARCH (1,1), GJR (1,1) モデルを変換すると、各々、(20), (27), (28)式となる。これらの式に従い、 $\{R_{t+1}, \dots, R_T\}$  を計算する。計算された  $\{R_{t+1}, \dots, R_T\}$  を以下のように満期日での原資産価格に変換する。

$$S_T = S_t \exp\left(\sum_{i=1+1}^T R_i\right). \quad (34)$$

したがって、これら定式化の下では、 $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  で表記される  $N$  個のパラメータ集合のサンプルを用いて、ヨーロピアン・コール・オプション価格とヨーロピアン・プット・オプション価格は、割引現在価値を平均することにより以下のように評価することができる。

$$C_i^{MCMC} = e^{-(T-t)r} \times \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\text{Max}(S_T(\theta_j) - K, 0)], \quad (35)$$

$$P_i^{MCMC} = e^{-(T-t)r} \times \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\text{Max}(K - S_T(\theta_j), 0)]. \quad (36)$$

したがって、 $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  で表記される  $N$  個のサンプルを用いて、(35), (36)式を以下のように計算することにより求められる。

$$C_i^{MCMC} = e^{-(T-t)r} \times \frac{1}{N} \sum_{j=\theta_1}^{\theta_N} \left[ \text{Max}\left(S_t \exp\left(\sum_{s=t+1}^T R_s^j\right) - K, 0\right) \right], \quad (37)$$

$$P_i^{MCMC} = e^{-(T-t)r} \times \frac{1}{N} \sum_{j=\theta_1}^{\theta_N} \left[ \text{Max}\left(K - S_t \exp\left(\sum_{s=t+1}^T R_s^j\right), 0\right) \right]. \quad (38)$$

MCMC を用いたベイズ推定法では、これまでの先行研究のように ARCH 型モデルのパラメータの推定とモンテカルロ・シミュレーションによるオプション評価と分けることなくオプション価格を導出することができる。

日経225の標本期間・標本数, 日経225オプションの標本期間・標本数, パフォーマンスの評価法, マネネスは、三井 [2000] と同じである。無リスク資産利子率  $r$  には、有担保1ヶ月物のコール・レートを使用している。実証分析の結果として、B-S モデルと比較すると GARCH, EGARCH, GJR モデルはコール・オプションでは、ATM, ITM で優れ、プット・オプションでは、DOTM, DITM で優れているという結果となっている。また、GARCH, EGARCH, GJR モデルの中では、取引量の多いマネネス (コールは OTM と ATM, プットは ATM と ITM) では、GJR モデルが比較的、他のモデルよりも優れている。リスク・プレミアムの値は非常に小さく、オプション価格に特に影響するわけではない。そのため、Duan [1995] のモデルで評価したオプション価格は、渡部 [2003] と同様に伝統的なリスク中立性を仮定したモデルで評価された価格と大きな差異がないことが示されてる。

## V. 長期記憶モデルによるオプション価格付け

竹内 (野木森)・渡部 [2008] は、ボラティリティ変動の長期記憶性を考慮することにより日経225オプションの実証研究を行なっている。

また、ボラティリティ変動の長期記憶性だけでなく、収益率とボラティリティの非対称性も捉えることができるように FIEGARCH モデルにより分析を行なっている。ここでは、投資家のリスク中立性を仮定して、 $t$  時点の日経225の株価を  $S_t$  とするとき、収益率  $R_t$  の過程を以下のように定式化している。

$$\begin{aligned} R_t &= \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) + div, \\ &= r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、 $div$  は連続複利で計算された日次配当を表し、 $r_t$  は連続複利で計算された無リスク資産の利子率の日次の値を表す。また、収益率の過程が(18)式の場合も分析を行なっている。

ボラティリティ  $\sigma_t^2$  の変動過程には、ボラティリティの長期性を捉えるため(7)式の FIEGARCH(1,  $d$ , 0) モデルを用い、比較モデルとして短期記憶モデルである(4)式の GARCH(1, 1) モデルと(5)式の EGARCH(1, 1) モデルも用いている。Duan [1995] のリスク中立測度に従い、(7)式を変換すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + [1 - \beta(L)]^{-1} (1 - L)^{-d} g(u_{t-1}), \\ g(u_{t-1}) &= \theta(u_{t-1} - \lambda) + \gamma[|u_{t-1} - \lambda| - E|z_{t-1}|], \\ u_t &= z_t + \lambda. \end{aligned} \quad (40)$$

FIEGARCH(1,  $d$ , 0) モデル、EGARCH(1, 1) モデル、GARCH(1, 1) モデルのパラメータの推定には、疑似最尤法を利用している。モンテカルロ・シミュレーションにより(11)、(12)式でオプション価格を導出している。ここでは、Duan and Shimonato [1998] の経験的マルチンゲール・シミュレーション (Empirical Martingale Simulation; EMS) により補正を行なっている<sup>17)</sup>。分散減少法には制御変数法を利用している。東京証券取引所一部で取引されている

日経225の225銘柄の取引は15:00で終了となる。しかし、日経225オプションは15:10に取引終了となる。そのためオプションの市場価格には15:00に一番近い売り気配と買い気配の平均値を用いている。日経225オプションの標本期間は2001年4月限月から2007年9月限月までであり、標本数はコール・オプションが715、プット・オプションが730である。無リスク資産利子率  $r_t$  には、1ヶ月物の CD レートを使用している。また、配当率は、年率0.5%で一定としている<sup>18)</sup>。モデルのパフォーマンスの評価に関しては、(22)と(23)式の MER と RMSER 以外にも理論価格のバイアスを測るため以下のような平均誤差 (Mean Error; ME) と平均 2 乗誤差 (Root Mean Square Error; RMSE) も用いて各モデルの比較を行なっている。

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}), \quad (41)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}})^2},$$

$$X = C, P. \quad (42)$$

ME と RMSE により市場価格と推定値のバイアスを検証することができる。また、マネネスの分類は、図表2の5つのカテゴリーで行なっている。

コール・オプションでは、FIEGARCH モデルによるオプション評価が最もパフォーマンスが良く、プット・オプションでは、FIEGARCH モデルが最もパフォーマンスが良いわけではないが RMSE の基準ではパフォーマンスが最も高くなるという実証結果となっている。また、すべてのモデルでボラティリティを過大評価しており、オプション価格を過大評価していることを指摘している。さらに、シュ

ミレーションにより求められた満期日  $T$  時点での原資産の日経225株価  $S_T$  の分布についても分析を行なっている。 $S_T$  の歪度の値がボラティリティ一定の B-S モデルと非対称性のない GARCH モデルでは正の値になり、非対称性を考慮した EGARCH モデルと FIEGARCH モデルでは負の値になるということである。このことがオプション評価に影響していることを示している。局所リスク中立性による分析では、FIEGARH モデルを用いた場合でも渡部 [2003], 三井・渡部 [2003], 竹内 [2006] と同様にパフォーマンスは改善されないことを明らかにしている。

## VI. ARCH 型モデルの応用によるオプション価格付け

### 1. Markov-Switching モデルによるオプション評価

Hamilton and Susmel [1994] と Cai [1994] は、構造変化を捉えるために ARCH モデルの定式化にマルコフ過程に従う状態変数を含めた Markov-Switching ARCH (MS-ARCH) モデルを提案した。さらに、Gray [1996] は資産価格の変動を捉えるために、ARCH モデルではなく時系列モデルのパラメータがマルコフ過程に従う構造変化を含めた Markov-Switching GARCH (MS-GARCH) モデルを提案した。Satoyoshi and Mitsui [2011] では、Gray [1996] の MS-GARCH により日経225オプションの実証研究を行なっている。収益率  $R_t$  の過程は(1)式とし、ボラティリティ  $\sigma_t^2$  の過程は以下のように定式化している。

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} E[\sigma_{t-1}^2 | \Omega_{t-1}], \quad (43)$$

$$\omega_{s_t} = \omega_0 (1 - s_t) + \omega_1 s_t, \quad (44)$$

$$\alpha_{s_t} = \alpha_0 (1 - s_t) + \alpha_1 s_t, \quad (45)$$

$$\beta_{s_t} = \beta_0 (1 - s_t) + \beta_1 s_t. \quad (46)$$

ボラティリティ  $\sigma_t^2$  は、 $t-1$  時点までの情報集合  $\Omega_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$  と  $t$  時点の状態変数  $s_t$  を条件とした  $\epsilon_t$  の条件付分散つまり、 $\sigma_t^2 = \text{Var}[\epsilon_t | I_{t-1}, s_t]$  である。(43)式の  $\Omega_{t-2}$  は  $t-2$  時点までの情報集合  $\Omega_{t-2} = \{R_{t-2}, R_{t-3}, \dots\}$  である。(44), (45), (46)式の  $s_t$  はマルコフ過程に従う状態変数であり、その推移確率 (transition probability) は、

$$\Pr[s_t = 1 | s_{t-1} = 1] = p,$$

$$\Pr[s_t = 0 | s_{t-1} = 0] = q \quad (47)$$

であるとする。ただし、 $\Pr[s_t = j | s_{t-1} = i]$  は、状態  $i$  から状態  $j$  に推移する確率である。 $s_t = 0$  のときのボラティリティを  $\sigma_{0t}^2$ 、 $s_t = 1$  のときのボラティリティを  $\sigma_{1t}^2$  とすると、ボラティリティ  $\sigma_t^2$  は各々、

$$\begin{cases} s_t = 0 \text{ のとき, } \alpha_{0t}^2 = \omega_0 + \alpha_0 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_0 E[\sigma_{t-1}^2 | \Omega_{t-2}], \\ s_t = 1 \text{ のとき, } \alpha_{1t}^2 = \omega_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 E[\sigma_{t-1}^2 | \Omega_{t-2}] \end{cases}$$

となる。 $z_t$  の分布には、(14)式の標準正規分布と(24)式の  $t$  分布を仮定している。この他に、MSモデルと GARCH モデルによるオプション評価の比較もここでは行っている。

日経225の標本期間は1990年2月22日から2005年3月10日までである。MS-GARCH モデルのパラメータの推定には、最尤法を利用している。オプション評価の際には、投資家のリスク中立性を仮定し、(11), (12)式のモンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を導出している。モンテカルロ・シミュレーションの分散減少法には制御変数法と負相関法を併せて用いている。日経225オプションの標本期間は2000年5月限月から2005年4月限月までであり、標本数はコール・オプションが608、プツ

ト・オプションが671である。満期日まで20日のオプションの終値を対象としている。無リスク資産としては、無担保コール翌日物を用いている。モデルのパフォーマンス評価に関しては、三井 [2000]、三井・渡部 [2003] と同様に(22)式と(23)式の MER と RMSER により行なっている。また、マネネスの分類は、図表2の5つのカテゴリーで行なっている。

コール・オプションについては、MERの基準では GARCH モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れており、RMSER の基準では  $t$  分布を仮定した MS-GARCH モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れているという結果となっている。また、MS-GARCH モデルは DOTM, OTM, ATM, ITM における B-S モデルの underpricing を修正できることが明らかにしている。特に、このことは DOTM と OTM において顕著である。プット・オプションについては、MER の基準では  $t$  分布を仮定した MS モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れており、RMSER の基準では  $t$  分布を仮定した GARCH モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れているという結果を得ている。全体的にみると、MS-GARCH モデルによるオプション評価は、B-S モデルよりも適正な価格付けを行なうことができる。また、原資産価格収益率に対する  $t$  分布の仮定とボラティリティが MS 過程に従うという仮定は、オプション価格の評価において非常に重要であるということを明らかにしている。

## 2. 原資産収益率の分布の歪みを考慮したオプション評価

これまでの ARCH 型モデルを用いた日経225オプションの先行研究では、原資産収益率の分布の歪みを考慮したモデルによる研究はなかった。Haas *et al.* [2004] と Alexander and Lazar [2006] は、収益率の分布の裾の厚さと左右非対称性を捉えるため混合正規分布と GARCH モデルを組み合わせた混合正規 GARCH モデルを提案した。そこで、里吉・三井 [2013] では、Haas *et al.* [2004] と Alexander and Lazar [2006] の混合正規 GARCH モデルを応用し、ボラティリティの変動が EGARCH モデルに従う混合正規 EGARCH モデルを提案し、実証研究を行なっている。

混合正規 EGARCH モデルは、以下のように表現される。

$$R_i | I_{t-1} \sim NM(p_1, \dots, p_k; \mu_1, \dots, \mu_k; \sigma_{1i}^2, \dots, \sigma_{ki}^2), \quad (48)$$

$$\ln \sigma_{ii}^2 = \omega_i + \beta_i \ln \sigma_{ii}^2{}_{t-1} + \theta_{z_i, t-1} + r(|z_{i, t-1}| - E(|z_{i, t-1}|)), \quad (49)$$

$$z_{i, t-1} = [R_{t-1} - E(R_{t-1} | I_{t-2})] / \sigma_{i, t-1}, \quad i=1, 2, \dots, K. \quad (50)$$

ここで、 $NM$  は、Normal Mixture を表す<sup>19)</sup>。(49)式の  $E(|z_{i, t-1}|)$  は  $\sqrt{2/\pi}$  となる。ここでは、混合正規分布を構成する正規分布の数は4つとし、 $K=4$ としている。また、株価収益率の分布は裾が厚いことが知られているため  $t$  分布を成分とした混合  $t$  分布についても分析を行なっている。 $\nu$  を自由度とするとき  $K=4$  の混合  $t$  分布は以下のように表される。

$$R_i | I_{t-1} \sim tM(p_1, \dots, p_4; \mu_1, \dots, \mu_4; \sigma_{1i}^2, \dots, \sigma_{4i}^2; \nu), \quad (51)$$

ここで、 $tM$  は、 $t$  Mixture を表す。このとき、(49)式の  $E(|z_{i, t-1}|)$  は、 $[2\sqrt{\nu-2}\Gamma((\nu+1)/2)] / [(\nu-1)\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi}]$  となる。このモデルを混合  $t$

図表3 マネネスによるオプションの分類; 里吉・三井 [2013]

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.85$	very-deep-out-of-the-money (VDOTM)	VDITM
$0.85 \leq S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K \leq 1.15$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM
$1.15 < S/K$	very-deep-in-the-money (VDITM)	VDOTM

(注)  $S$  は原資産価格,  $K$  は権利行使価格を表す。

EGARCH モデルとする。

日経225の標本期間は1991年2月26日から2009年12月9日までである。混合正規EGARCHモデルと混合 $t$ EGARCHモデルのパラメータの推定には、最尤法を利用している。オプション評価の際には、森保 [1999], 三井・渡部 [2003], Satoyoshi and Mitsui [2011]と同様に投資家のリスク中立性を仮定<sup>20</sup>し、モンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を導出している。モンテカルロ・シミュレーションの分散減少法には制御変数法と負相関法を併せて用いている。日経225オプションの標本期間は2005年6月限月から2010年1月限月までの56限月であり、標本数はコール・オプションが741、プット・オプションが816である。満期日まで30日のオプションの終値を対象としている。無リスク資産としては、CDを用い、オプションが満期の1ヵ月前であることから、CDも同じ1ヶ月物にして、売り気配と買い気配の中間値を無リスク資産の利子率としている。

モデルのパフォーマンス評価に関しては、三井 [2000] と Satoyoshi and Mitsui [2011]と同様に(2)式と(3)式のMERとRMSERにより行

なっている。里吉・三井 [2013] はこれまでの先行研究とは異なり、オプションのサンプルの偏りを調整するために、原資産価格と権利行使価格との乖離率が非常に高いオプションに関しては、Duan *et al.* [2006], Benhamou *et al.* [2010]を参考にして新たに very-deep-out-of-the-money (VDOTM), very-deep-in-the-money (VDITM)を追加し、マネネスは図表3のように7種類のカテゴリーに分類している<sup>21</sup>。

実証研究の結果、コール・オプションでは混合正規EGARCHモデルによる価格付けが最もパフォーマンスが良く、特に、V DOTMとDOTMのコール・オプションで顕著であることを明らかにしている。しかしながら、プット・オプションでは、混合正規EGARCHモデルと混合 $t$ EGARCHモデルの有効性は示されていない。ここでは、B-Sモデルが最も優れているという結果となっている。コール・オプションとプット・オプションとの間で相反する結果となったため、更に1年ごとの期間に区切って分析を行なっている。サンプル期間を区切った分析では、時期によりコール・オプションとプット・オプションの双方においてパ

パフォーマンスに違いが出ることを示している。特に、原資産の日経225が上昇トレンドの時期と下降トレンド時期では、モデルにより結果が異なることを示唆している。また、プット・オプションはヘッジの機能が強いいため、ボラティリティの変動とは違う要因で価格付けされている面が強いことを指摘している。

## Ⅶ. まとめと今後の展望

本論文は、代表的なボラティリティの変動モデルである ARCH 型モデルによる日経225オプションの実証研究に関してサーベイを行なったものである。実際に ARCH 型モデルによるオプション評価は、B-S モデルよりもオプション価格を正確に捉えることができるかどうか、また、どの ARCH 型モデルを利用することがオプション評価に適しているかどうかには焦点を当てサーベイを行なった。

ARCH 型モデルを利用した場合、ボラティリティが満期まで一定であると仮定している B-S モデルよりもオプション評価のパフォーマンスは良くなることが明らかとなった。GARCH, EGARCH, GJR モデルを比較すると、全体的に GJR モデルによるオプション評価が比較的良好的な結果となっている。また、FIEGARCH モデル、MS-GARCH モデル、混合正規 EGARCH モデルを用いると、より精度を上げてオプション価格の変動を捉えることができることがわかった。しかし、株式市場の特性に合わせて、日経225オプションの原資産となる日経225株価収益率に対して、GARCH, EGARCH, GJR モデルでは裾の厚い  $t$  分布を仮定しても、オプション評価にはほとんど影響を与えないことや、ARCH 型モデルに関して

リスク・プレミアムを考慮して収益率の変動過程を定式化し、Duan [1995]の局所リスク中立性を導入しても、伝統的な投資家のリスク中立性を仮定した場合よりもオプション評価のパフォーマンスは上がらないことは今後の課題となるであろう。

無リスク資産金利に関して、Kim [2002]は、日経225オプションのデータを用いて金利変動モデルの実証研究を行なっている。そこでは、オプション価格付けに関して金利は重要な要因ではないという結果を得ている。そのため、コール・レートや CD 以外の無リスク資産利子率を用いても研究結果に影響はないと考えられる。しかし、今後、金利が上昇した場合には、無リスク資産利子率についてどの金利を使用するかも重要になってくるとと思われる。

理論的な解は B-S モデル以外にも Heston and Nandi [2000]は GARCH オプションについて解析解を与えている。株式市場の非対称性を捉える他のモデルとして Engle and Ng [1993]の NGARCH (Nonlinear asymmetric GARCH) モデルなど他の ARCH 型モデルや株式市場の構造変化を考慮した MS-EGARCH モデルなど、日経225オプションの分析に使用されていない ARCH 型モデルは存在する。そのため、今後の展望としてはこれらのモデルにより日経225オプションの実証分析を行ない比較することが考えられる。また、高頻度データによる Realized Volatility モデルや Realized GARCH モデルなどとも、比較・検討を行なうことが挙げられる。投資家のリスク中立性を仮定しないモデルとして Duan [1995]の他に Siu *et al.* [2004]の定式化が参考になるとと思われる。さらに、中・長期のオプションなど満期までの期間を変えたときの ARCH 型モデルの有

効性についても検証する必要がある。また、ボラティリティ変動モデルでのインプライド・ボラティリティ (implied volatility), ボラティリティ・スマイル (volatility smile) などの特性についても実証研究が行われることが期待される。

注

- 1) 満期日(権利消滅日)のみ権利行使可能なオプションをヨーロピアン・オプションと呼び、満期日以前にいつでも権利行使可能なオプションをアメリカン・オプション (American option) と呼ぶ。
- 2) ボラティリティは資産収益率の分散、あるいは標準偏差により定義され、株式など将来の収益が不確定なリスク資産のリスクの指標として用いられている。
- 3) 日経225オプションの制度概要など、詳しくは大阪取引所 website<<http://www.ose.or.jp/derivative/225options>>を参照。
- 4) 詳しくは、三井 [2004] を参照。
- 5) ARCH 型モデルの理論と金融市場への応用・実証例として、詳しくは Xekalaki [2010] を参照。
- 6) Satoyoshi and Mitsui [2012] は、MS-EGARCH モデルにより日経225オプションの実証分析を行なっている。Watanabe and Ubukata [2009] は、高頻度データによる Realized Volatility を使用して EGARCH モデルと FIEGARCH モデルにより実証分析を行っている。また、Takeuchi-Nogimori [2012] は、同様に高頻度データを使用し、Hansen *et al.* [2012] の Realized GARCH モデルにより日経225プット・オプションに関して分析を行なっている。しかし、これらの研究は Working Paper なので、本論文のサーベイの対象とはしない。
- 7)  $k$  の自己相関係数 (autocorrelation coefficient) を  $\rho(k)$  とするとき、 $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$  ならば短期記憶過程に従い、 $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$  ならば長期記憶過程に従う。長期記憶性に関して詳しくは、矢島 [2003]、松葉 [2007] を参照。
- 8) ガンマ関数は以下のように定義される。  

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx, \text{ for } \nu > 0.$$
- 9) オプション価格を評価する  $t$  時点においては、 $t$  時点から  $t+1$  時点にかけての無リスク資産の利子率  $r_{t+1}$  は既知であるが、その先の利子率は未知である。したがって、 $t$  時点から満期である  $T$  時点までの利子率は一定であると仮定し、 $r = r_{t+1}, r_{t+2}, \dots, r_T$  とおいて現在価値を計算することになる。
- 10) モンテカルロ・シミュレーションによるオプション評価に関して、詳しくは Broadie and Glasserman [1996]、Boyle *et al.* [1997] を参照。
- 11) 詳しくは、French and Roll [1986]、Nelson [1991]、Noh *et al.* [1994] を参照。
- 12) ボラティリティ  $\sigma^2$  の変動は、以下のように記述することもできる。

$$\sigma_t^2 = n_t^2 [\omega + n_{t-1}^2 (\beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha R_{t-1}^2)].$$

- 13) LRNVR とは、確率測度  $Q$  が確率測度  $P$  に関して相互に絶対連続であるとき、以下の3つの条件を満足することをいう。
  1.  $S_t/S_{t-1} | \Omega_{t-1}$  が確率測度  $Q$  の下で対数正規分布に従っている。
  2.  $E^Q \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \Omega_{t-1} \right) = e^r$ .
  3. 確率測度  $P$  に関して、  

$$\text{Var}^Q \left( \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \middle| \Omega_{t-1} \right) = \text{Var}^P \left( \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \middle| \Omega_{t-1} \right) \text{ a.s.}$$
 ここで、 $E^Q[\cdot]$  は確率測度  $Q$  の下での期待値を表し、 $\text{Var}^Q[\cdot]$ ,  $\text{Var}^P[\cdot]$  は、それぞれ確率測度  $Q$ ,  $P$  の下での分散を表す。

- 14) 株価収益率の分布は、正規分布よりも両裾が厚く (fat-tails), 左右非対称であることが検証されている。
- 15) GARCH(1,1), GJR(1,1) モデルで  $\omega$  ではなく  $\ln(\omega)$  を用いているのは、 $\omega$  の値が非常に小さい値であることが過去の研究から推測され、また、正の値をとるので、対数をとった  $\ln(\omega)$  の形で事前分布を設定している。
- 16) 未知のパラメータ集合を  $\Theta$  とする。このとき、事後分布 (posterior distribution) は以下のように与えられる。

$$f(\Theta | \text{data}) \propto (\text{data} | \Theta) f(\Theta).$$

ここで、 $f(\text{data} | \Theta)$  は尤度、 $f(\Theta)$  は事前分布を表す。

- 17) 詳しくは、竹内 (野木森)・渡部 [2008] の補論 B を参照。
- 18) 実証研究を行なう際、B-S モデルに対しても配当があるモデルでオプション評価を行なっている。
- 19) 確率変数  $X$  が  $K$  個の正規分布から構成される混合正規分布に従うとき、その確率密度関数は、

$$f(x) = \sum_{i=1}^K p_i \phi(x; \mu_i, \sigma_i^2)$$

となる。ここで、加重値  $p_i$  は  $p_i \in (0, 1)$ ,  $i=1, 2, \dots, K$ ,

$\sum_{i=1}^K p_i = 1$  であり、各成分  $\phi(x; \mu_i, \sigma_i^2)$  は、

$$\phi(x; \mu_i, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[ -\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right]$$

となり、以下のように表す。

$$X \sim \text{NM}(p_1, \dots, p_K; \mu_1, \dots, \mu_K; \sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2).$$

- 20) 混合正規分布の左右非対称性と裾の厚さを保証するために、混合正規分布を4つにしてパラメータに制約を置くなどの若干の工夫が必要となる。
- 21) Bakshi *et al.* [1997] のような従来の5種類のカテゴリでは、DOIM と DOTM のオプションのサンプルが他のマネネスのオプションに比べて極端に多くなってしまったためである。

参 考 文 献

里吉清隆・三井秀俊 [2013] 「原資産の収益率に歪みがある場合のオプション評価—混合正規 EGARCH モデルによる分析—」『日本統計学

- 会誌], 第43巻, 第1号, 1-23頁。
- 竹内(野木森)明香・渡部敏明 [2008]「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」『現代ファイナンス』, No. 24, 45-74頁。
- 竹内明香 [2006]「日経225オプション価格の実証分析～ARCH, ARCH-t, SVモデルによる比較」『一橋経済学』, 1巻, 2号, 187-208頁。
- 松葉育雄 [2007]『長期記憶過程の統計—自己相似な時系列の理論と方法—』, 共立出版。
- 三井秀俊 [1998]「日経225株価指数とオプション価格の確率的分散変動モデルによる分析」『ファイナンス研究』, No.24, 23-40頁。
- 三井秀俊 [2000]「日経225オプション価格のGARCHモデルによる分析」『現代ファイナンス』, No.7, 57-73頁。
- 三井秀俊 [2004]「ボラティリティ変動モデルによるオプション評価法の展開」『経済集志』, 第74巻, 第1号, 109-140頁。
- 三井秀俊, 渡部敏明 [2003]「ベイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」『日本統計学会誌』, 第33巻, 第3号, 307-324頁。
- 森保洋 [1999]「ARCHモデルによる日経225オプション評価」『現代経済学研究』, 7, 143-159頁。
- 矢島美寛 [2003]「長期記憶をもつ時系列モデル」刈屋武昭・田中勝人・矢島美寛・竹内啓 [著]『経済時系列の統計—その数理的基礎—』(統計科学のフロンティア8), 岩波書店, 103-202頁。
- 渡部敏明 [2003]「日経225オプションデータを使ったGARCHオプション価格付けモデルの検証」『金融研究』, 第22巻, 別冊第2号, 1-34頁。
- Alexander, C. and E. Lazar [2006] “Normal Mixture GARCH(1,1): Applications to Exchange Rate Modelling,” *Journal of Applied Econometrics*, 21, pp. 307-336.
- Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen [1996] “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, pp. 3-30.
- Bakshi, G., C. Cao and Z. Chen [1997] “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, pp. 2003-2049.
- Benhamou, E., E. Gobet and M. Miri [2010] “Time Dependent Heston Model,” *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 1, pp. 289-325.
- Black, F. and M. Scholes [1973] “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-654.
- Bollerslev, T. [1986] “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen [1996] “Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73, pp. 151-184.
- Boyle, P., M. Broadie and P. Glasserman [1997] “Monte Carlo Methods for Security Pricing,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, pp. 1267-1321.
- Broadie, M. and P. Glasserman [1996] “Estimating Security Price Derivatives Using Simulation,” *Management Science*, 42, pp. 269-285.
- Cai, J. [1994] “A Markov Model of Switching-Regime ARCH,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, pp. 309-316.
- Duan, J.-C. [1995] “The GARCH Option Pricing Model,” *Mathematical Finance*, 5, pp. 13-32.
- Duan, J.-C. and J. -G. Simonato [1998] “Empirical Martingale Simulation for Asset Prices,” *Management Science*, 44, pp. 1218-1233.
- Duan, J.-C., P. Ritchken and Z. Sun [2006] “Jump Starting GARCH: Pricing and Hedging Options with Jumps in Returns and Volatilities,” *Working Paper*, 06-19, Federal Reserve Bank of Cleveland.

- 5 Mar. 2013 <<http://www.clevelandfed.org/research/workpaper/2006/wp0619.pdf>>.
- Engle, R. F. and V. K. Ng [1993] "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance*, 48, pp. 1749-1778.
- Fama, E. [1965] "The Behavior of Stock Prices," *Journal of Business*, 38, pp. 34-105.
- French, K. R. and R. Roll [1986] "Stock Return Variance: The Arrival of Information and the Reaction of Traders," *Journal of Financial Economics*, 17, pp. 5-26.
- Garman, M. B. and S. V. Kohlhagen [1983] "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance*, 2, pp. 231-237, Reprinted in DeRosa, D. (ed.) *Currency Derivatives*, [1998] New York: John Wiley & Sons.
- Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle [1993] "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, 48, pp. 1779-1801.
- Gray, S. F. [1996] "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process," *Journal of Financial Economics*, 42, pp. 27-62.
- Haas, M., S. Mittnik and M. S. Paoletta [2004] "Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Financial Econometrics*, 2, pp. 211-250.
- Hamilton, J. D. and R. Susmel [1994] "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime," *Journal of Econometrics*, 64, pp. 307-333.
- Hansen, P. R., Z. Huang and H. H. Shek [2012] "Realized GARCH: A Joint Model for Returns and Realized Measures of Volatility," *Journal of Applied Econometrics*, 27, pp. 877-906.
- Heston, S. L. and S. Nandi [2000] "A Closed-Form GARCH Option Valuation Model," *Review of Financial Studies*, 13, pp. 585-625.
- Kim, Y. -J. [2002] "Option Pricing under Stochastic Interest Rates: An Empirical Investigation," *Asia-Pacific Financial Markets*, 9, pp. 23-44.
- Mandelbrot, B. [1963] "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, 36, pp. 394-416.
- Merton, R. C. [1973] "The Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-183.
- Nelson, D. B. [1991] "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, pp. 347-370.
- Noh, J., R. F. Engle and A. Kane [1994] "Forecasting Volatility and Option Pricing of the S&P500 Index," *Journal of Derivatives*, pp. 17-30, Reprinted in Engle, R. F. ed. [1995] *ARCH: Selected Readings*, Chapter 15, Oxford University Press.
- Satoyoshi, K. and H. Mitsui [2011] "Empirical Study of Nikkei 225 Options with the Markov Switching GARCH Model," *Asia-Pacific Financial Markets*, 18, pp. 55-68.
- Satoyoshi, K. and H. Mitsui [2012] "Option Valuation under Bulls and Bears Market Conditions," *Working Papers Series* 12-01, Nihon University.  
23 Oct. 2013 <<http://www.eco.nihonu.ac.jp/center/economic/publication/pdf/12-01.pdf>>.
- Takeuchi-Nogimori, A. [2012] "An Empirical Analysis of Nikkei 225 Put Options Using Realized GARCH Models," *Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series*, 241, Hitotsubashi University.  
12 Mar. 2013 <<http://gcoe.ier.hit-u.ac.jp/research/discussion/2008/pdf/gd12-241.pdf>>.
- Tierney, L. [1994] "Markov Chains for Exploring Posterior Distributions [with discussion]," *An-*

- nals of Statistics*, 21, pp. 1701-1762.
- Siu, T. K., Tong, H. and H. Yang [2004] "On Pricing Derivatives under GARCH Models: A Dynamic Gerber-Shiu's Approach," *North American Actuarial Journal*, 8, pp. 17-31.
- Watanabe, T. and M. Ubukata [2009] "Option Pricing Using Realized Volatility and ARCH Type Models," *Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series*, 066, Hitotsubashi University.  
13 Mar. 2013 <<http://gcoe.ier.hit-u.ac.jp/research/discussion/2008/pdf/gd09-066.pdf>>.
- Xekalaki, E. and S. Degiannakis [2010] *ARCH Models for Financial Applications*, Wiley.  
(日本大学経済学部准教授)